

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECATRÔNICA

Nota final  
10 (dez)  
ndm

ALGORITMO DE TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA  
PARA USO CLÍNICO BASEADO EM IDENTIFICAÇÃO  
DIRETA DA MATRIZ DE SENSIBILIDADE

Pai Chi Nan

São Paulo  
2005

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECATRÔNICA

ALGORITMO DE TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA  
PARA USO CLÍNICO BASEADO EM IDENTIFICAÇÃO  
DIRETA DA MATRIZ DE SENSIBILIDADE

Trabalho de formatura apresentado à Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo  
para obtenção do título de Graduação em  
Engenharia

Pai, Chi Nan

Orientador: Prof. Dr. Raúl González Lima

Área de Concentração:  
Engenharia Mecatrônica

São Paulo  
2005

**DEDALUS - Acervo - EPMN**



31600011852

4493076

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**Chi Nan Pai**

**Algoritmo de tomografia de impedância elétrica para uso clínico baseado em identificação direta da matriz de sensibilidade / Chi Nan Pai. -- São Paulo, 2005.**

**p.**

**Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.**

**1.Tomografia de impedância elétrica 2.Retro-projeção  
3.Phantom 4.Algoritmos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.**

---

A meus pais e  
meus irmãos

## Agradecimentos

Ao amigo e orientador Prof. Dr. Raúl González Lima, pelas diretrizes seguras e permanente incentivo.

Aos colegas do grupo de Tomografia por Impedância Elétrica, pelo indispensável apoio.

Aos meus colegas da engenharia mecatrônica, em especial Ana, Andrés, Carlos, Rafael e Sandro, pelo suporte e incentivo, sem o qual não seria possível a minha graduação em 4 anos.

## RESUMO

Em pacientes sob ventilação mecânica, o conhecimento do estado clínico pulmonar é fundamental para evitar barotraumas e hipóxias. No campo de monitoração pulmonar, a tomografia de impedância elétrica (TIE) se mostra um método bastante promissor devido a altas diferenças de impedância entre pulmão aerado e pulmão colabado. A TIE é um método para obtenção de imagens de um domínio a partir de medidas elétricas (corrente ou voltagem) feitas nas fronteiras deste domínio. Com o auxílio de algoritmos de reconstrução de imagens, é possível estimar a distribuição de impedância elétrica dentro deste domínio. Atualmente o algoritmo mais conhecido é o de retro-projeção, idealizado por Barber e Brown em 1983. Entretanto, ele é limitado a domínios 2D e possui sensibilidade não uniforme e baixa-resolução espacial. Este presente trabalho tem o objetivo de desenvolver um novo algoritmo baseado em identificação direta da matriz de sensibilidade para minimizar estas deficiências na prática clínica. Para tal serão estudados e desenvolvidos os algoritmos de retro-projeção; criado um novo algoritmo denominado caixa-preta, e feito uma comparação entre os algoritmos.

# ABSTRACT

In patients under mechanical ventilation, informations about the lung clinical state are fundamentals for avoiding hypoxia and lung injuries. At pneumo-monitoring field, the electrical impedance tomography (EIT) seems to be a good method due to high impedance differences between inflated and collapsed lung tissues. The Electrical Impedance Tomography is a method to estimate images of certain domain from electrical measurements (current or voltage) obtained on the boundaries of this domain. Using image reconstruction algorithms, it is possible to estimate the electrical impedance distribution inside this domain. The well known back-projection algorithm, described by Barber and Brown in 1983 is limited to 2D domain, with low spatial resolution and non-uniform sensitivity. In this present work a new algorithm based on the direct identification of sensitivity matrix to minimizing these deficiencies for medical use is developed. Will also be studied and developed the back-projection algorithms to be compared with the new one, called black-box algorithm.

# Sumário

<b>RESUMO</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>ii</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>v</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>vii</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Propriedades Elétricas dos Tecidos . . . . .	1
1.2 Efeitos Biológicos da Corrente Elétrica . . . . .	2
1.3 Tomografia por Impedância Elétrica . . . . .	3
1.3.1 Métodos de Estimação de Impedância . . . . .	4
1.3.2 Aplicações Clínicas . . . . .	6
<b>2 OBJETIVOS</b>	<b>8</b>
<b>3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>10</b>
3.1 Método de Elementos Finitos . . . . .	10
3.2 Problemas Direto e Inverso . . . . .	11
3.3 Algoritmo de Retro-Projeção . . . . .	12
3.4 Algoritmo de Retro-Projeção Filtrada . . . . .	14
3.5 Método de Sensibilidade . . . . .	15



<b>4</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA</b>	<b>17</b>
4.1	Desenvolvimento do Algoritmo de Retro-Projeção . . . . .	17
4.2	Desenvolvimento do Algoritmo de Retro-Projeção Filtrada . . . . .	18
4.3	Identificação Direta da Matriz de Sensibilidade . . . . .	19
4.3.1	Determinação de $\mathbf{B}$ . . . . .	20
4.3.2	Índices de Erro . . . . .	22
4.3.3	Regularizações . . . . .	23
4.4	Teste Experimental . . . . .	23
4.5	Otimização dos Parâmetros de Regularização . . . . .	25
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>26</b>
5.1	Regularizações . . . . .	26
5.2	Comparação dos algoritmos . . . . .	33
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>45</b>
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>46</b>
<b>8</b>	<b>REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>47</b>
	<b>APÊNDICE A</b>	<b>51</b>
	<b>APÊNDICE B</b>	<b>54</b>
	<b>APÊNDICE C</b>	<b>61</b>

# Lista de Figuras

3.1	Retro-projeção no raio-x . . . . .	12
3.2	Linhas de equipotenciais. . . . .	13
4.1	Malha para retro-projeção . . . . .	17
4.2	Malha para problema direto . . . . .	18
4.3	Cuba experimental. . . . .	24
4.4	Malha em 3D . . . . .	24
5.1	$\beta = 1.0$ e $\gamma = 1.0$ . . . . .	26
5.2	$\alpha = 1.0$ e $\gamma = 1.0$ . . . . .	27
5.3	$\alpha = 1.0$ e $\beta = 1.0$ . . . . .	27
5.4	$\beta = 1.0e^2$ e $\gamma = 1.0e^{-7}$ para cilindro em posição 1 . . . . .	29
5.5	$\beta = 1.0e^2$ e $\gamma = 1.0e^{-6}$ para cilindro em posição 1 . . . . .	30
5.6	$\beta = 1.0e^2$ e $\gamma = 1.0e^{-6}$ para cilindro em posição 2 . . . . .	31
5.7	$\alpha = 1.0e^{-3}$ , $\beta = 1.0e^0$ e $\gamma = 1.0e^{-6}$ . . . . .	32
5.8	Retro-Projeção Simples . . . . .	34
5.9	Retro-Projeção Filtrada . . . . .	35
5.10	Caixa-Preta - Heurística . . . . .	36
5.11	Caixa-Preta - Coluna de B . . . . .	37
5.12	Caixa-Preta - Coluna de B X Retro-Projeção Simples . . . . .	38
5.13	Caixa-Preta - Coluna de B X Retro-Projeção Filtrada . . . . .	39
5.14	Caixa-Preta - Coluna de B X Heurística . . . . .	40
5.15	Caixa-Preta - Coluna de B X Retro-Projeção Simples . . . . .	41

5.16 Caixa-Preta - Coluna de B X Retro-Projeção Filtrada . . . . .	42
5.17 Caixa-Preta - Coluna de B X Heurística . . . . .	43
7.1 Linhas equipotenciais em coordenadas (x1,x2) . . . . .	52
7.2 Fluxograma do algoritmo de retro-projeção simples . . . . .	61
7.3 Fluxograma do algoritmo de retro-projeção filtrada . . . . .	62
7.4 Fluxograma do algoritmo de caixa-preta . . . . .	63

# Lista de Tabelas

1.1	Condutividade ( $S\text{m}^{-1}$ ) de tecidos biológicos . . . . .	2
5.1	Valores de BR e de pico variando $\beta$ . . . . .	33
5.2	Valores de BR normalizados . . . . .	44
7.2	BR para cilindro na borda (Posição 2) . . . . .	55
7.3	Valores de pico para cilindro no centro (Posição 1) . . . . .	56
7.4	Valores de pico para cilindro na borda (Posição 2) . . . . .	57
7.5	Valores de BR e de pico para cilindro na posição 1 . . . . .	58
7.6	Valores de BR e de pico para cilindro na posição 2 . . . . .	59
7.1	BR para cilindro no centro (Posição 1) . . . . .	60

# 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas houve uma grande evolução da ciência médica, tanto na área de terapêutica como na de diagnóstico, e isso tem contribuído para a diminuição da taxa de mortalidade da população. No campo do diagnóstico, surgiu há alguns anos um novo método de imagem, a tomografia por impedância elétrica, onde através de informações como correntes elétricas e potenciais elétricos, chega-se a distribuição de resistividade da área de interesse.

## 1.1 Propriedades Elétricas dos Tecidos

O corpo humano é formado por células, que se arranjam em estruturas denominadas tecidos. Cada região do corpo apresenta um tipo celular distinto e, portanto, arranjo tecidual distinto. Nas paredes celulares existe presença de canais e bombas que permitem a passagem de íons de um lado para outro, ou seja, do meio intra-celular para o meio extra-celular, ou vice-versa. Dessa forma, a concentração de íons inter-celular varia de tecido para tecido (GUYTON, 2002).

Diferentemente dos condutores metálicos, a condução elétrica em tecidos biológicos é devido mais a movimentos iônicos do que a carregadores de cargas elétricas. Na presença de campos elétricos, a corrente de condução é originada devido a movimento dos íons dentro do espaço inter-celular, isto é, ela é relacionada diretamente com a concentração de íons e com a arquitetura estrutural do tecido, uma vez que quanto maior a concentração iônica e mais fácil a sua locomoção, maior será a corrente elétrica.

Na sua tese, Metherall (1998) apresenta uma tabela com as condutividades de alguns dos tecidos biológicos.

Material	Espécie	Frequência				
		1Khz	10Khz	100Khz	1Mhz	10Mhz
Cérebro	Bovino	$2 \times 10^5$	$2 \times 10^4$	$4 \times 10^3$	$1 \times 10^3$	$3 \times 10^2$
Fígado	Bovino	$9 \times 10^4$	$3 \times 10^4$	$1 \times 10^4$	$2 \times 10^3$	$2 \times 10^2$
Rim	Bovino	$2 \times 10^5$	$4 \times 10^4$	$1 \times 10^4$	$2 \times 10^3$	$4 \times 10^2$
Músculo trans	Bovino	$6 \times 10^5$	$3 \times 10^4$	$1 \times 10^4$	$2 \times 10^3$	$1 \times 10^2$
Músculo long	Bovino	$1 \times 10^6$	$3 \times 10^4$	$2 \times 10^3$	$4 \times 10^2$	$2 \times 10^2$
Pulmão inflado	Bovino	$1 \times 10^5$	$2 \times 10^4$	$3 \times 10^3$	$6 \times 10^2$	$2 \times 10^2$
Útero	Humano	$1 \times 10^6$	$2 \times 10^4$	$3 \times 10^3$	$1 \times 10^3$	$3 \times 10^2$
Pele	Humano	$4 \times 10^4$	$3 \times 10^4$	$2 \times 10^4$	$2 \times 10^3$	$2 \times 10^2$
Tecido Adiposo	Humano	$1 \times 10^4$	$4 \times 10^2$	$5 \times 10^1$	$2 \times 10^1$	$1 \times 10^1$

Tabela 1.1: Condutividade ( $S m^{-1}$ ) de tecidos biológicos

Devido a influência da estrutura tecidual na condutividade elétrica, vários tecidos podem apresentar variações temporais de suas propriedades elétricas. Nopp *et al* (1993) descobriram que as propriedades elétricas do tecido pulmonar são altamente dependentes das condições teciduais e que tanto a condutividade como a permitividade diminuem com aumento do volume de ar inspirado.

## 1.2 Efeitos Biológicos da Corrente Elétrica

Para se trabalhar com correntes elétricas no corpo humano, é preciso entender, antes de tudo, os efeitos que elas causam no corpo humano. Em estudos realizados pela equipe de Barber e Brown (1984), observou-se que baixos níveis de correntes em frequências baixas, tais como ( $< 0.1$  Hz), o principal efeito é a eletrólise, observado clinicamente através de formação de úlceras na pele ao redor do eletrodo. A medida em que se aumenta a amplitude da corrente, começam a ser estimulados os nervos sensitivos e depois os nervos motores. Aumentando a frequência para acima de 10 kHz, a estimulação neural passa a requerer um nível muito alto de corrente aplicada. Neste caso, os efeitos clínicos passam a ser aquecimento tecidual.

### 1.3 Tomografia por Impedância Elétrica

A Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) é um método para obtenção de imagens baseado na estimação da distribuição da impedância elétrica em uma seção transversal do volume de interesse. Para a obtenção das imagens, são colocados ao redor do domínio em estudo eletrodos equi-espaçados entre si e o processo de estimação pode ser feito através de:

- Correntes elétricas que são aplicadas através de dois eletrodos enquanto que os valores de voltagem são registrados pelos demais. Com os dados de voltagem obtidos e os da corrente aplicada, estima-se a distribuição das resistividade dentro do domínio;
- Ou, voltagens elétricas que são aplicadas e medem-se as correntes originadas por estas voltagens. Com estes dados é possível estimar a distribuição da resistividade neste domínio.

Devido a limitações quanto ao número de eletrodos que podem ser postos ao redor do domínio e, conseqüentemente, do número de voltagens medidas nas fronteiras do domínio, uma vez que a presença muito próxima de um eletrodo ao outro interfere tanto na medida de potencial elétrico como na passagem de corrente, as imagens geradas apresentam resolução espacial limitada. Além disso, as TIEs apresentam sensibilidade não uniforme, sendo mais sensível a perturbações de resistividade na borda do domínio do que a perturbações de resistividade no centro do domínio. Entretanto, apesar destes problemas, ela apresenta diversas vantagens para a prática clínica, tais como:

- o pulmão aerado apresenta uma grande diferença na condutividade elétrica com relação ao pulmão colabado, devido a presença de ar, um isolante elétrico, como demonstrado pelo Nopp *et all* (1993);
- é uma técnica relativamente barata, comparada com um tomógrafo de raio x, ou a ressonância magnética;

- não há efeitos adversos conhecidos derivados do seu uso, desde que observadas as medidas de segurança;
- os dados podem ser rapidamente coletados e, portanto, as alterações funcionais podem ser avaliados;
- permite monitoração contínua por períodos longos.

### 1.3.1 Métodos de Estimação de Impedância

Para se obter imagens, é preciso, além do aparelho, algoritmos de estimação de imagens. Atualmente os métodos de estimação de impedância mais estudados são:

1. Newton-Raphson;
2. Filtro estendido de Kalman;
3. Markov Chain Monte Carlo (MCMC);
4. linhas equipotenciais (retro-projeção);
5. método de sensibilidade.

O método de Newton-Raphson (MIRANDA, 2000) é um método numérico utilizado na resolução de sistemas não lineares que apresentam a forma  $f_i(\rho) = 0$ , onde  $\rho$  é um vetor de distribuição de resistividade para  $i = 1, \dots, N$  e que se destaca pela sua robustez e eficiência. No paper *Comparison of Impedance Tomography Reconstruction Algorithms*, Yorkey *et al* (1986) fazem uma comparação entre os diversos métodos de imagem para TIE existentes e concluem que o método de Newton-Raphson apresenta um resultado melhor do que outros métodos, além de provar a convergência do método. Na tese de Miranda (2000), ele faz uma implementação do método de Newton-Raphson para resolver o sistema não linear associado à minimização de um funcional de erro quadrático, dado pela diferença entre as voltagens medidas e calculadas.

O método de filtro de Kalman aborda o problema de estimação ótima através do método de mínimos quadrados sob o ponto de vista probabilístico e de forma recursiva



(TRIGO, 2001). Com isso é possível, a partir de poucas e incertas medidas, estimar de forma recursiva, parâmetros de um modelo que também apresenta erros. Na tese de Trigo (2001) há uma implementação do filtro estendido de Kalman, uma vez que o problema de estimação é não linear, e portanto, o filtro linear de Kalman é inadequado para resolver este problema não linear.

No método de MCMC, utiliza-se formulação estatística do problema gerando a função densidade de probabilidade de ocorrer determinada distribuição de resistividade sabendo que ocorreu determinado conjunto de medidas de potencial elétrico. Para chegar a estimativas individuais, aplica-se o método de integração de Monte Carlo (KAIPIO, 2000).

Os três primeiros métodos são classificados como métodos absolutos, enquanto que os dois últimos são métodos de diferenças de imagens, pois eles mostram a variação da resistividade tecidual entre o instante da coleta dos dados e um instante de referência, normalmente tomado num instante inicial. Os métodos de diferenças de imagens são utilizados para se evitar dois dos grandes problemas da TIE, o formato irregular do contorno estudado e a natureza tri-dimensional do problema (BARBER e BROWN, 1984).

As correntes elétricas, ao serem injetadas através de dois eletrodos, apresentam fugas de correntes, principalmente num ambiente hospitalar, onde os pacientes geralmente estão conectados a outros aparelhos, fornecendo caminhos para a corrente elétrica. Como estas fugas são praticamente impossíveis de serem avaliadas, uma vez que necessitaria da presença de eletrodos em todo o corpo, os dados no contorno ficam comprometidos. Além disso, o formato do corpo em estudo também é importante. Atualmente sabe-se que a sensibilidade das medidas ao formato do corpo é tão grande quanto a sensibilidade à distribuição interna de resistividade (BROWN, 2003).

Como estes dois problemas ainda não foram totalmente solucionados, os grupos de pesquisa da TIE geralmente utilizam diferenças de imagens para minimizar estes erros. Isto porque os erros num mesmo paciente, tanto em termos de fuga de corrente como no formato do contorno, são semelhantes em dois instantes próximos e utilizando a imagem diferencial, estes erros se cancelam, diminuindo os seus efeitos. Dessa forma, os métodos mais importantes em uso atualmente são os de retro-projeção

e o de sensibilidade, cujas implementações serão feitas neste trabalho, e portanto, serão discutidas mais adiante.

### 1.3.2 Aplicações Clínicas

O principal motivo para se admitir pacientes numa Unidade de Terapia Intensiva (UTI) é a necessidade de suporte ventilatório, quando o paciente não consegue, por esforço próprio, respirar de forma eficiente, necessitando de assistência por meio de aparelhos de ventilação mecânica. Em *Advances in Mechanical Ventilation*, Tobin (2001) descreve as principais causas que levam ao uso de ventilação mecânica:

1. falência respiratória aguda;
2. coma;
3. exacerbação aguda da doença pulmonar obstrutiva crônica (DPOC);
4. distúrbios neuromusculares.

Para cada tipo de patologia existe o seu tratamento mais adequado. Dessa forma, os aparelhos de ventilação apresentam modos distintos de operação para adequar às necessidades do paciente. Existem atualmente três modos principais de ventilação mecânica nos aparelhos existentes:

**ventilação assistida controlada** o ventilador fornece um volume fixo de ar, desencadeado pela inspiração do paciente, ou por um intervalo de tempo pré-determinado;

**ventilação mandatória intermitente** uma frequência respiratória fixa a volume constante é fornecida pelo aparelho. Entre estas respirações mandatórias, o paciente pode respirar normalmente;

**ventilação a pressão de suporte** uma pressão pré-determinada de ar é fornecida a cada inspiração.

Apesar dos benefícios dos ventiladores mecânicos, na última década tem-se demonstrado que o seu uso inadequado pode levar a lesões pulmonares tão ou mais

graves que aquelas decorrentes do uso de altas frações inspiradas de oxigênio (KNOBEL, 1994) e (AMATO, 1998). Dessa forma, uma estratégia ventilatória voltada à preservação da microestrutura pulmonar poderia ter um papel fundamental no restabelecimento da função pulmonar. Para tanto, são necessários métodos de monitoração eficientes, que fornecem informações dinâmicas ao médico intensivista.

No campo de monitoração via métodos de imagem, a tomografia por impedância elétrica (TIE) se mostra bastante promissor, superando os métodos de imagem convencionais, tais como tomografia computadorizado por raio-x (TC) e ressonância magnética (RM). Apesar destes métodos (TC e RM) serem excelentes em termos de diagnósticos, eles são inadequados para monitoração contínua pois:

- a TC utiliza radiação para obtenção de imagens, e exposição prolongada a radiação é prejudicial à saúde;
- a RM utiliza campo magnético para obtenção de imagens, o que impossibilita a presença de metal na sala durante o seu funcionamento. E este fato é praticamente impossível para um paciente sob ventilação mecânica;
- tanto a TC quanto a RM são aparelhos de grande porte, necessitando de um espaço razoável para o seu funcionamento, o que eleva em muito o custo da presença destes aparelhos numa UTI;
- os aparelhos de TC e RM são caros devido a sua dimensão e complexidade. Financeiramente é impraticável o uso individual destes aparelhos para monitoração contínua, uma vez que apenas um paciente por vez pode ser monitorado.

Dessa forma, a TIE se torna bastante atrativo para este tipo de aplicação clínica.

## 2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é criar um novo algoritmo de estimação de imagens da TIE para uso clínico. Este algoritmo tem como idéia principal a estimação direta da matriz de sensibilidade e cuja estrutura final é da forma  $\left\{ \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right\} = [\mathbf{B}] \left\{ \frac{\delta U}{U_0} \right\}$  onde a matriz  $\mathbf{B}$  é a matriz desejada, sendo chamada de matriz de caixa-preta; a  $\left\{ \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right\}$  representa a distribuição de resistividade normalizada e  $\left\{ \frac{\delta U}{U_0} \right\}$  representa as medidas de potenciais elétricos obtidas no contorno do domínio.

Além disso, serão desenvolvidos também os algoritmos de retro-projeção simples, idealizados por Barber e Brown (1984), baseado na interpretação de Santosa e Vogelius (1990), conforme descrito no artigo *Backprojection algorithm for electrical impedance imaging* e a versão melhorada deste algoritmo, denominado retro-projeção filtrada, onde as medidas de potenciais elétricos recebem um tratamento prévio antes de serem retro-projetados, incluindo informações a priori, e melhorando assim a imagem.

Atualmente os principais algoritmos em uso na área clínica são os de retro-projeção e os de sensibilidade. Entretanto, os de retro-projeção apresentam baixa resolução espacial e sensibilidade não uniforme, tendo melhores imagens na borda do domínio do que no centro. Entretanto, em áreas como pneumologia, a borda do domínio corresponde a parede torácica, uma região de pouco interesse clínico, comparado com o centro do domínio, onde se situam os órgãos como coração e pulmão.

Com relação aos algoritmos que utilizam método de sensibilidade, eles são algoritmos pouco robustos pois necessitam da informação de todos os eletrodos para gerar as imagens. Entretanto, muitas vezes os eletrodos apresentam problemas de contato com a parede torácica, prejudicando a monitoração.

O novo algoritmo busca manter a robustez dos algoritmos de retro-projeção, ao

mesmo tempo em que uniformiza a sensibilidade ao domínio, dando um maior suporte ao médico.

O desenvolvimento dos algoritmos de retro-projeção neste trabalho, além de permitir comparação dos resultados entre os dois métodos mais utilizados na atualidade, possibilitará um melhor entendimento deste método, uma vez que falta na literatura informações mais detalhadas a respeito da estrutura deste algoritmo.

# 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

## 3.1 Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos é um método numérico para resolver problemas de engenharia e física matemática (LOGAN, 2002). Ele é especialmente interessante em problemas onde não é possível obter soluções matemáticas analíticas, seja devido a geometrias, cargas ou propriedades de materiais complexas. A formulação via elementos finitos resulta em solução de sistemas de equações algébricas, ao invés de sistemas de equações diferenciais. A idéia principal é discretizar o domínio de interesse e resolver cada um dos elementos constituintes deste domínio para se obter a solução do domínio inteiro.

Para a aplicação deste método deve-se em primeiro lugar discretizar o problema, escolhendo uma malha de elementos de tal forma que melhor represente o domínio a ser estudado. Estes elementos podem ser, por exemplo, lineares, triangulares ou quadráticos para problemas bi-dimensionais, ou podem ser tetraédricos, pentaédricos, para problemas tri-dimensionais.

A seguir escolhe-se uma função de aproximação que representa a solução dentro de cada elemento. Essa função deve ter coeficientes desconhecidos que serão determinados de forma a minimizar o erro na solução e devem ser escritos em função dos valores nos nós da malha.

Após a escolha da função de aproximação, monta-se o sistema matricial local, correspondente a cada um dos elementos da malha, em função de grandezas nodais e depois o sistema matricial global, correspondente ao domínio como um todo.

Por fim, aplicam-se as condições de contorno e resolve o sistema de equações, seja através de métodos diretos ou iterativos.

## 3.2 Problemas Direto e Inverso

A tomografia por impedância elétrica envolve conceitos de problemas direto e inverso. De acordo com Kaipio e Somersalo (2004), problemas inversos são encontrados tipicamente em situações onde se faz observações indiretas da medida de interesse. Um exemplo simples citado é a medida de temperatura através da dilatação do mercúrio. A função que relaciona o volume com a temperatura é modelo direto, enquanto que obter a temperatura a partir da variação de volume do mercúrio é um modelo inverso.

Dessa forma, podemos entender problemas diretos e inversos como:

**Problema Direto** quando conhece-se a excitação e as propriedades do meio e buscam-se os efeitos causados pela excitação no meio;

**Problema Inverso** quando conhece-se o efeito e as propriedades do meio e busca-se encontrar a excitação que originou este efeito, ou quando conhece-se o efeito e a excitação e procura-se a distribuição de uma propriedade deste meio.

No caso da TIE, o problema direto é 'sabendo a distribuição de resistividade do domínio em estudo e a corrente aplicada nele, busca encontrar as medidas de potenciais elétricos no contorno deste domínio', enquanto que o problema inverso é 'conhecendo as medidas de potenciais elétricos e a corrente aplicada, busca-se encontrar a distribuição de resistividade do domínio'.

Ao trabalhar com problemas inversos, é comum encontrar termos como crime inverso. De acordo com Kaipio e Somersalo (2004), entende por crime inverso os métodos numéricos que deixam os problemas inversos menos mal-postos do que realmente são, obtendo assim resultados ótimos irrealistas. Isto ocorre quando:

- os dados simulados produzidos numericamente são obtidos com o uso de mesmo modelo que foi utilizado para se inverter os dados e,
- a discretização na simulação numérica é a mesma da utilizada na inversão.

Para se evitar crimes inversos, quando se trabalha com problemas inversos mal-postos, são utilizados métodos chamados regularizações.

Dessa forma, podemos considerar a TIE como:

1. inverso, pois deseja-se determinar a distribuição de resistividade (propriedade do meio) a partir dos valores de corrente (perturbação) e medidas de potencial elétrico (efeitos);
2. mal-posto, pois dois elementos vizinhos do espaço de voltagens na fronteira do domínio não necessariamente levam a dois elementos vizinhos no espaço de distribuição de resistividade;
3. não-linear, pois a variação das medidas de voltagem não é proporcional a variação na distribuição de resistividade.

### 3.3 Algoritmo de Retro-Projeção

O algoritmo de retro-projeção de TIE, idealizado por Barber e Brown em 1983, é um algoritmo bastante eficiente e de baixo custo computacional (YORKEY, 1986), sendo um dos mais conhecidos da atualidade. A sua idéia principal é derivada do algoritmo de retro-projeção da tomografia computadorizada por raio-x. Neste, um feixe de raio-x passa por um objeto num domínio, sofrendo atenuação de sinal no extremo oposto. Este sinal, captado por sensores no outro lado do objeto, é retro-projetado pelo algoritmo de retro-projeção, e a combinação destes sinais, originados por feixes distintos, resulta na imagem inicial. Além disso, faz-se ainda a suposição de que a relação entre a variação de impedância e a variação de potenciais elétricos é uma relação linear.

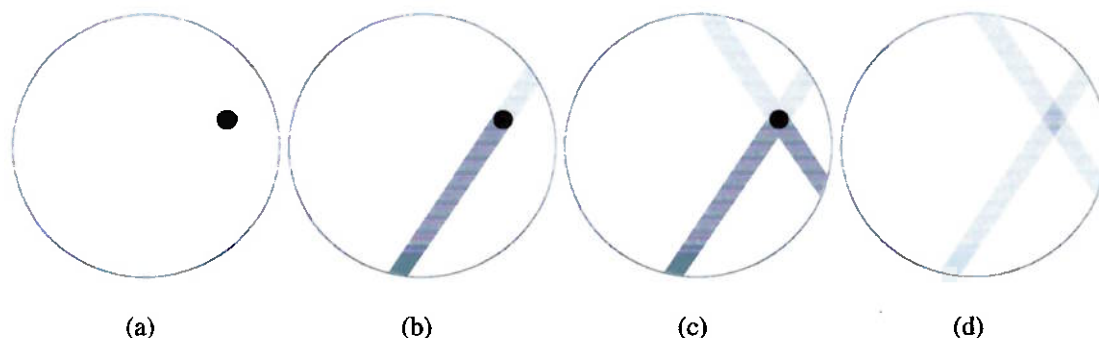


Figura 3.1: (a) Objeto num domínio. (b) Perturbação devido a um feixe de raio-x. (c) Perturbação devido a dois feixes de raio-x. (d) Imagem retro-projetada.



Nas TIEs, diferentemente de raios-x, as linhas de corrente e de potenciais elétricos não percorrem um trajeto retilíneo. Dessa forma, o algoritmo deve ser adaptado para o novo trajeto. Num domínio circular, pode-se identificar o padrão das linhas equipotenciais de voltagem pela figura 3.2.

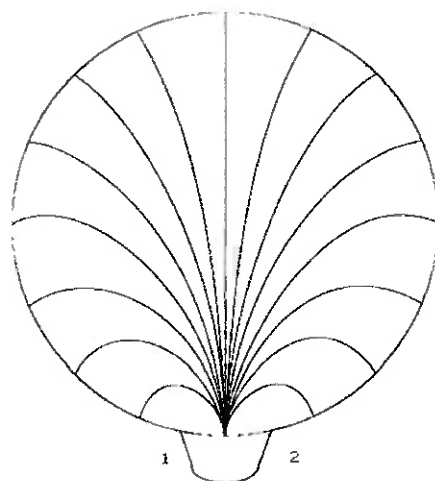


Figura 3.2: Linhas de equipotenciais.

Estas linhas de potenciais se formam quando a corrente percorre pelos eletrodos 1 e 2, formando trajetos ortogonais às linhas de potenciais de voltagem.

Para o equacionamento do problema, foram feitas as seguintes hipóteses, de acordo com Santosa e Vogelius (1990):

1. o domínio é bidimensional;
2. não há fontes de corrente internas ao domínio;
3. o meio é isotrópico;
4. o contorno da região de interesse é circular;
5. os eletrodos estão equidistantes um do outro, ao redor do domínio;
6. a distribuição de resistividade inicial é uniforme;
7. as alterações de resistividade são pequenas.

E o resultado final é a equação 3.1:

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma_0} = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\delta U}{U_0} (2V - 1) \quad (3.1)$$

onde  $\frac{\delta\sigma}{\sigma_0}$  é a variação de condutividade normalizada em relação a um instante inicial  $\sigma_0$ ,  $m$  é o número de eletrodos utilizados e  $\frac{\delta U}{U_0}$  é a variação de potencial elétrico normalizada. A dedução completa está no apêndice.

Na prática clínica, a interpretação da imagem utilizando distribuição de condutividades é menos comum do que imagens em termos de distribuição de resistividade. Dessa forma, Pai *et al* (2005a) propuseram uma variação do algoritmo de retro-projeção, com interpretação em termos de resistividade. E a equação final é da forma:

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\delta U}{U_0} (2V - 1) \quad (3.2)$$

Montando em forma matricial, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta\rho \\ \rho_0 \end{array} \right\} = [B] \left\{ \begin{array}{c} \delta U \\ U_0 \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

Neste formato, após o cálculo da matriz  $B$ , denominada matriz de retro-projeção, a operação passa a ser de apenas uma multiplicação de matrizes, o que garante a rapidez deste algoritmo na estimação de imagens.

Para se evitar confusão entre a matriz  $B$  de retro-projeção (do inglês backprojection) e a matriz  $\mathbf{B}$  de caixa-preta (do inglês black-box), neste trabalho será utilizado  $B$  em itálico para matriz de retro-projeção e  $\mathbf{B}$  em negrito para matriz caixa-preta.

### 3.4 Algoritmo de Retro-Projeção Filtrada

O algoritmo de retro-projeção pressupõe que a distribuição de condutividade inicial do corpo é uniforme, o que não condiz com a realidade. Dessa forma, é necessário a incorporação de informações a priori para a correção desta hipótese (AVIS, 1995) e (METHERALL, 1998).

Para a realização deste filtro, consideramos a existência de um vetor de dados de medida normalizado  $U'_n$  tal que, ao ser retro-projetado, resultará em imagens corretas.

$$\sigma_n = BU_n' \quad (3.4)$$

Do problema direto, temos que

$$U_n = F\sigma_n \quad (3.5)$$

onde  $F$  é o operador que identifica os potenciais elétricos nos eletrodos a partir da distribuição de condutividade. Substituindo as equações temos

$$U_n = FB U_n' \quad (3.6)$$

e invertendo a matriz  $FB$  temos a seguinte relação:

$$U_n' = (FB)^{-1} U_n \quad (3.7)$$

que relaciona as medidas corretas com as medidas. Dessa forma, a equação final de retro-projeção se torna:

$$\sigma_n = B(FB)^{-1} U_n \quad (3.8)$$

### 3.5 Método de Sensibilidade

O método de sensibilidade, no qual pertence o algoritmo de caixa-preta, busca encontrar o quanto cada elemento do domínio é sensível a variação de potencial elétrico na borda do domínio. Para tal o domínio é discretizado através de modelo de elementos finitos.

O modelo matemático do método é  $\delta U = S\delta\sigma$ , onde  $\delta U$  é a variação de potencial elétrico,  $S$  é a matriz de sensibilidade e  $\delta\sigma$  é a variação de condutividade. Na tese de Metherall (1998), ele faz uma descrição das diversas formas para se encontrar esta matriz de sensibilidade:

1. algoritmo iterativo linealizado assumindo variações pequenas na condutividade:

2. método analítico para encontrar os coeficientes da matriz  $e$ , a partir destes, reconstruir os dados experimentais da cuba;
3. método iterativo baseado no teorema de Geselowitz onde a impedância medida é relacionada com a variação de condutividade através de uma matriz de sensibilidade computada a partir de uma distribuição de condutividade conhecida. Comparando a impedância medida com a teórica e utilizando a mesma matriz  $S$ , encontra uma nova variação de condutividade que é utilizada para atualizar os valores de condutividade. Após algumas iterações chega-se a solução desejada.

## 4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Aqui neste capítulo serão descritos como são construídos os diversos algoritmos já citados.

### 4.1 Desenvolvimento do Algoritmo de Retro-Projeção

Neste algoritmo procura-se encontrar o valor de potencial elétrico num ponto dentro do domínio para aplicação da equação 3.2.

Em primeiro lugar, os pontos onde serão obtidos os dados para a composição da imagem final e suas respectivas coordenadas são determinados. A seguir, computa os valores de potenciais elétricos nestes pontos usando as linhas de equipotenciais. Como nem sempre as linhas equipotenciais interceptam na borda no ponto onde há disponibilidade de medidas, faz-se uma interpolação para obtenção destas medidas. Com os dados obtidos, aplica-se a equação 3.2 para montar a matriz  $B$  de retro-projeção.

Neste trabalho, foi utilizada uma malha de elementos finitos para obter os pontos de interesse do domínio, que correspondem aos centróides do elemento triangular da malha.

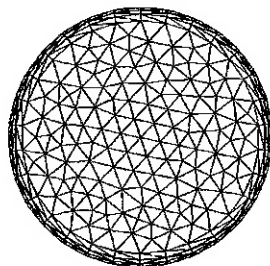


Figura 4.1: Malha utilizada para se obter os pontos de interesse.

Isto foi feito para que se possa comparar os resultados deste algoritmo com o de caixa-preta, uma vez que o número de pontos existentes no domínio influencia diretamente na resolução espacial da imagem final. Dessa forma, serão utilizadas malhas com número de elementos semelhantes para efeito de comparação.

Com as coordenadas dos pontos conhecidas, faz-se uma mudança de coordenadas para o sistema  $\{U,V\}$ , como descrito em apêndice. A seguir, encontramos a coordenada do ponto na borda do domínio equipotencial ao ponto de interesse através das seguintes equações:

$$x_{b3} = \frac{4U}{4U^2 + 1} \quad (4.1)$$

$$x_{b4} = \frac{2}{4U^2 + 1} - 1 \quad (4.2)$$

Usando os valores de potenciais elétricos destes pontos  $(x_{b3}, x_{b4})$  no ponto  $(x_1, x_2)$ , correspondente à coordenada do ponto de interesse, e aplicando a equação 3.2, chega-se a imagem desejada.

## 4.2 Desenvolvimento do Algoritmo de Retro-Projeção

### Filtrada

Para este algoritmo, é necessário encontrar a matriz  $\mathbf{F}$  do problema direto, que identifica os valores de potenciais elétricos a partir dos valores de correntes elétricas e das propriedades do domínio. Para tal, utilizamos a mesma malha da figura 4.1, porém com a presença de eletrodos (figura 4.2).

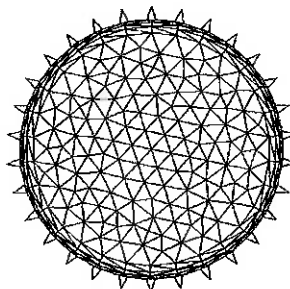


Figura 4.2: Malha utilizada para problema direto.

Para resolver o problema direto, pode-se utilizar a formulação de elementos finitos em problemas de transferência de calor, segundo Logan (2002), como mostrado em tese de Molina (2002). A matriz  $F$  distingue-se da matriz de sensibilidade  $H$  descrita na tese de Molina pela normalização dos dados de medidas e pela normalização das imagens resultantes.

Depois de encontrar a matriz  $F$ , realiza-se a multiplicação de matrizes para obter  $B(FB)^{-1}$ . Note que a matriz  $FB$  é uma matriz mal-posta, portanto a sua inversão necessita de regularizações. Neste trabalho foi utilizada decomposição de valores singulares (SVD) para realizar esta inversão.

Para a obtenção da matriz  $B$ , foi utilizado o algoritmo de retro-projeção simples.

### 4.3 Identificação Direta da Matriz de Sensibilidade

A idéia central do método caixa preta é se imagens boas, representadas por variações relativas de resistividade, e medidas boas, representadas por variações relativas de potenciais nos eletrodos, estão disponíveis, então a matriz que relaciona medidas com as imagens pode ser estimada. O método forma um conjunto de imagens diferenciais e computa, usando modelos de elementos finitos, as respectivas variações nos potenciais dos eletrodos. A partir destes 2 conjuntos de informações, ele estima diretamente a matriz  $B$  de caixa-preta. Este método assume a linearidade entre variação de potenciais nos eletrodos e a variação da resistividade elétrica.

Para isso, primeiro ele assume uma distribuição de resistividade inicial a qual será usada como referência. Com esta referência, os potenciais elétricos são calculados, usando modelo de elementos finitos em 3D, incluindo o modelo de eletrodos, para cada padrão de injeção de corrente. A equação do problema direto, no caso, é:

$$[Y] * [U_i] = [c_j] \quad (4.3)$$

onde  $U_i$  corresponde a vetor de voltagens associado a  $i$  nós, e  $c_j$  é o vetor de correntes associado a  $j$  padrões de corrente.

A perturbação é imposta em cada elemento finito, um por vez. Os potenciais nos eletrodos são calculados e normalizados com relação ao potencial correspondente

ao valor de referência. Os potenciais perturbados são arranjados em vetores. A matriz de potenciais é então formado tal que cada coluna desta matriz é um vetor de potencial perturbado normalizado. Através da matriz de potencial perturbado e da matriz de perturbação de resistividade, a matriz **B** pode ser determinado.

### 4.3.1 Determinação de B

O procedimento para se determinar a matriz **B** é:

1. assume uma resistividade elétrica conhecida em cada um dos  $n$  elementos do domínio, arranjando-os como vetor  $\rho^0$ . A linearização do modelo é feita em volta de  $\rho^0$ .
2. cada padrão de injeção de corrente é denominado por  $\{c_j\}_{m \times 1}$  para  $j = 1, 2, \dots, m$ ;
3. os potenciais nos eletrodos,  $U_j^0$ , são determinados pelo problema direto,

$$\mathbf{Y}|_{\rho^0} U_j^0 = c_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.4)$$

4. uma perturbação conhecida na resistividade do  $i$ -ésimo elemento de  $\rho^0$  é denominado por  $\delta\rho_i$  e  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
5. vetores  $\{\delta\rho^i\}_{n \times 1}$  são formados tal que todos os elementos são nulos, exceto o  $i$ -ésimo elemento que contém  $\delta\rho_i$ , i. e.,  $\delta\rho^i_i = \delta\rho_i$ ;
6. para cada padrão de corrente  $c_j$ , os potenciais nos eletrodos,  $\{U_j^i\}$  relacionado com a perturbação da resistividade  $\delta\rho^i$  são determinados pelo problema direto,

$$\mathbf{Y}|_{(\rho^0 + \delta\rho^i)} U_j^i = c_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.5)$$

7. seja  $\{U^0\}_{m^2 \times 1}$  um vetor formado pelo  $\{U_j^0\}_{m \times 1}$  para  $j = 1, 2, \dots, m$ , tal que,

$$U^0 = \begin{bmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ \dots \\ U_m^0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$



8. seja  $\{U^i\}_{m^2 \times 1}$  um vetor formado por  $\{U_j^i\}_{m \times 1}$  para  $j = 1, 2, \dots, m$ , tal que,

$$U^i = \begin{bmatrix} U_1^i \\ U_2^i \\ \dots \\ U_m^i \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

9. forma-se o vetor normalizado  $\{\psi^i\}_{n \times 1}$  de tal forma que cada elemento, para  $i = 1, 2, \dots, n$ , é

$$\{\psi^i\}_j = \frac{\delta \rho_j^i}{\rho_j^0} \quad (4.8)$$

10. forma-se o vetor normalizado  $\{\theta^i\}_{m^2 \times 1}$  de tal forma que cada elemento, para  $i = 1, 2, \dots, n$ , é

$$\{\theta^i\}_{m^2 \times 1} = \frac{U^i - U_j^0}{U_j^0}, \quad (4.9)$$

11. define a matriz  $\Psi_{n \times n}$  tal que

$$\Psi_{n \times n} = \begin{bmatrix} \psi^1 & \dots & \psi^i & \dots & \psi^n \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

observe que esta matriz é diagonal;

12. define a matrix  $\Theta_{m^2 \times n}$  tal que

$$\Theta_{m^2 \times n} = \begin{bmatrix} \theta^1 & \dots & \theta^i & \dots & \theta^n \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

13. como cada coluna de  $\Psi$  é uma imagem e pode ser relacionada com a coluna de  $\Theta$  por uma matriz de retro-projeção, pode-se dizer que,

$$\Psi_{n \times n} = \mathbf{B}_{n \times m^2} \Theta_{m^2 \times n} \quad (4.12)$$

14. finalmente, determina a matrix  $\mathbf{B}$  tal que minimiza um índice de erro a ser determinado.

Uma vez que a matriz  $\mathbf{B}$  é obtida, a estimativa de uma imagem diferencial é feita multiplicando  $\mathbf{B}$  e o vetor de variação de potencial do eletrodo normalizado relacionado a cada padrão de corrente, de acordo com a eq. 4.13

$$\Delta\rho = \mathbf{B}\Delta V \quad (4.13)$$

onde  $\{\Delta\rho\}_{n \times 1}$  é de tal forma que  $i$ -ésimo elemento é  $\frac{(\rho^i - \rho^0)_j}{\rho^0_j}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , e  $\{\Delta V\}_{m^2 \times 1}$  é tal que  $j$ -ésimo elemento é  $\frac{(V_{medido} - V_{medido}^0)_j}{V_{medido}^0}$  para  $j = 1, 2, \dots, m^2$ .

### 4.3.2 Índices de Erro

Para obter a matriz  $\mathbf{B}$  a partir das matrizes  $\Psi$  e  $\Theta$ , devemos minimizar um índice de erro. Neste trabalho, o índice de erro adotado é:

$$IE = \mathbf{E}^T \mathbf{E} + \alpha \mathbf{B}_i^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{B}_i + \beta \mathbf{B}_i^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{B}_i \quad (4.14)$$

onde  $E = \Psi \omega_i - B_i$  e  $\omega = \Theta' (\Theta \Theta')^{-1}$ .

O índice  $i$  nestas equações representa a coluna  $i$  da matriz. Desta forma, as operações são realizadas não com a matriz inteira, mas com uma coluna de cada vez, diminuindo os erros numéricos.

Como a matriz  $\Theta \Theta'$  é mal-posta, para a sua inversão foi utilizada a regularização de tikhonov. E a matriz  $\omega$  passa a ser  $\omega = \Theta' (\Theta \Theta' + \gamma \mathbf{I})^{-1}$ .

Este índice de erro foi denominado "coluna de B", devido a manipulação por colunas.

Este índice não é o único viável. No artigo *A Black-Box Back-Projection Algorithm For Electrical Impedance Tomography*, Pai et al(2005b) utilizam outro índice de erro denominado heurístico:

$$IE = tr \{ \mathbf{E}^T \mathbf{E} + \alpha \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{B} + \beta \mathbf{B}^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{B} \} \quad (4.15)$$

onde  $E = \Theta(\Psi - B\Theta)$ .

Nos dois índices acima podem ser observados os termos  $F^T F$  e  $M^T M$  que são as regularizações utilizadas para melhorar a imagem final.

### 4.3.3 Regularizações

Como foi dito anteriormente, ao trabalhar com problemas inversos mal-postos, devemos utilizar regularizações. Neste trabalho, para a construção do algoritmo de caixa-preta, foram utilizadas duas regularizações onde:

$F^T F$  é um filtro passa alto para diminuir ruídos;

$M^T M$  é uma matriz de sensibilidade uniforme.

A função da matriz  $M$  é penalizar as informações presentes na borda do domínio e esta penalização está relacionada com a distância normalizada ao centro do domínio.

Seja

$$r = \frac{P - O}{r_0} \quad (4.16)$$

a distância normalizada do ponto  $P$ , e  $r_0$  a distância do centro até a borda do domínio.

A matriz  $M$  é uma matriz diagonal constituída por:

$$M = \begin{bmatrix} r_1^w & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2^w & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_n^w \end{bmatrix}$$

onde  $w$  é um coeficiente escolhido, e  $n$  é o número de elementos existentes na malha.

Com a penalização na borda do domínio, obtém-se uma imagem mais uniforme, uma vez que em TIE, as regiões periféricas são mais sensíveis a variação de resistividade do que nas regiões centrais.

## 4.4 Teste Experimental

Para teste dos algoritmos desenvolvidos, será utilizada uma cuba cilíndrica de acrílico de 300 mm de diâmetro, contendo solução salina. Ao redor da cuba estão posicionados 30 eletrodos para tomada de medidas e injeção de correntes elétricas. A variação da condutividade no domínio é realizada colocando um cilindro de acrílico de 32 mm de diâmetro, conforme a figura 4.3.



Figura 4.3: Cuba experimental.

A malha utilizada no algoritmo de caixa-preta é uma malha em 3D, para minimizar problemas de fuga de correntes e para ser mais fidedigna ao modelo real.

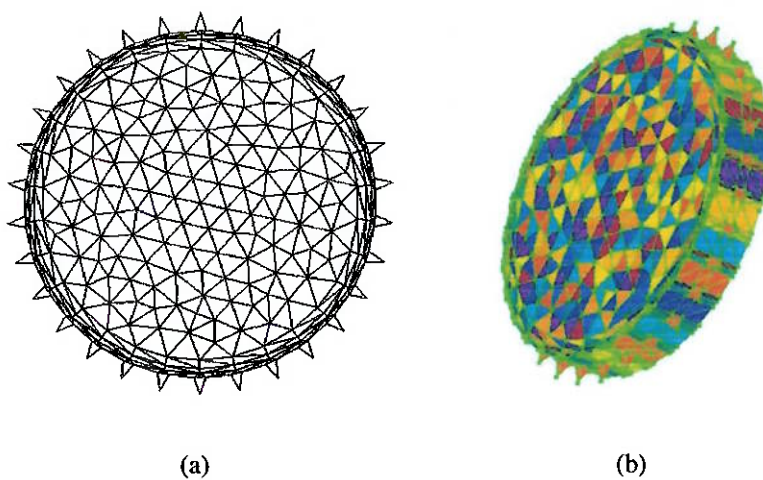


Figura 4.4: (a) Malha em vista superior. (b) Malha em vista oblíqua.

O cilindro de acrílico é posicionado no centro da cuba e a 120 mm do centro para efeito de comparação, testando a sensibilidade dos algoritmos.

## 4.5 Otimização dos Parâmetros de Regularização

Como na formulação teórica temos 3 parâmetros de regularização ( $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ ), podemos encontrar um valor ótimo destes parâmetros. Para tal utilizaremos um índice denominado raio de borramento como critério de escolha.

O raio de borramento (BR), de acordo com Adler (1995), estima o quanto a imagem fica "borrada" em relação ao objeto real. Para tal, utiliza a renderização tridimensional da imagem gerada e encontra um nível que divide o volume em dois. A intersecção deste plano encontrado com a imagem gerada forma uma área, denominada área borrada, e o raio de borramento é a raiz quadrada da razão entre a área borrada e a área da cuba circular. A equação do BR é:

$$\mathbf{BR} = \frac{r_z}{r_0} = \sqrt{\frac{A_z}{A_0}}, \quad (4.17)$$

onde  $A_z$  é a área borrada e  $A_0$  é a área da cuba.

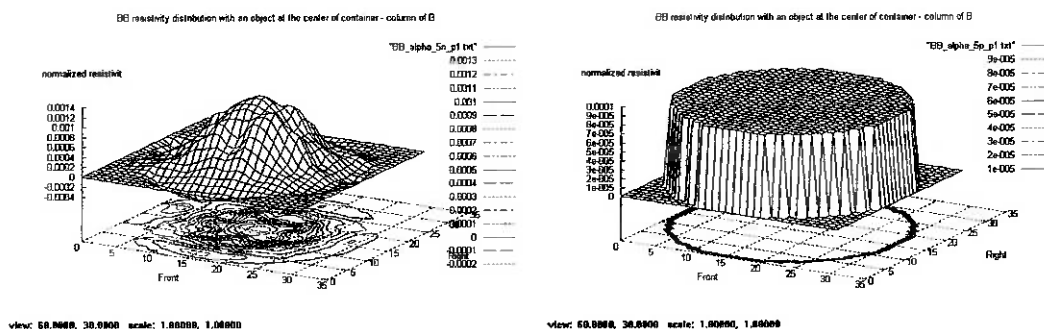
Variando os parâmetros ( $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ ), obteremos diversos valores de BR. E comparando estes valores com a razão entre o raio real do objeto e o raio da cuba, podemos encontrar os parâmetros que fornecem melhores resultados em termos de raio de borramento.

# 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

## 5.1 Regularizações

Para se determinar os intervalos das regularizações, a fim de encontrar um trio de parâmetros  $(\alpha, \beta, \gamma)$  ótimo, foi primeiro observado os efeitos de cada uma das regularizações, variando um parâmetro por vez. No primeiro momento foi utilizado apenas os dados do cilindro no centro da cuba, pois, como dito anteriormente, para uso clínico o mais interessante é o centro, e não a borda. Primeira estimativa de parâmetros:

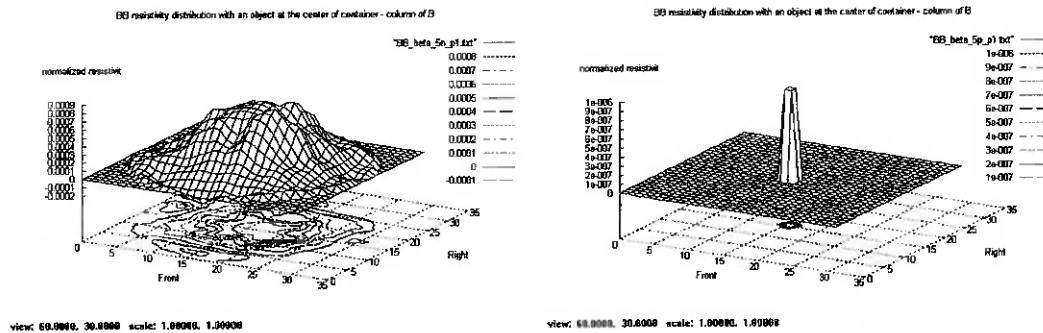
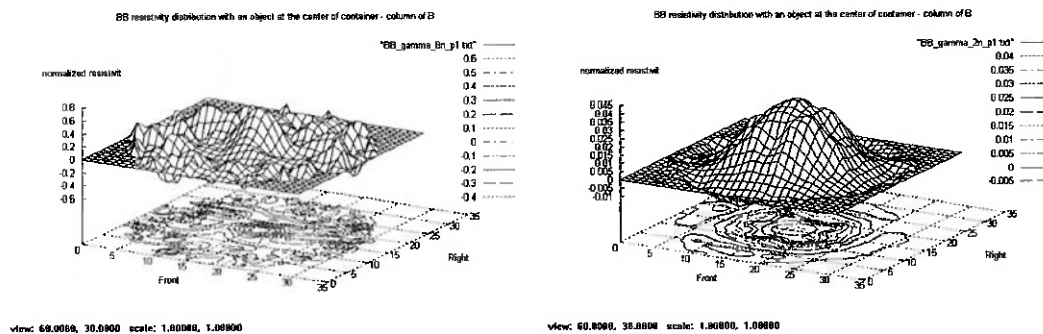
- Nas figuras 5.1(a) e 5.1(b), foram fixados os valores de  $\beta$  e  $\gamma$  em  $1.0e^0$ , e os valores de  $\alpha$  em  $1.0e^{-5}$  e  $1.0e^5$ .
- Nas figuras 5.2(a) e 5.2(b), foram fixados os valores de  $\alpha$  e  $\gamma$  em  $1.0e^0$ , e os valores de  $\beta$  em  $1.0e^{-5}$  e  $1.0e^5$ .
- Nas figuras 5.3(a) e 5.3(b), foram fixados os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  em  $1.0e^0$ , e os valores de  $\gamma$  em  $1.0e^{-2}$  e  $1.0e^{-8}$ .



(a)  $\alpha = 1.0e^{-5}$

(b)  $\alpha = 1.0e^5$

Figura 5.1:  $\beta = 1.0$  e  $\gamma = 1.0$

(a)  $\beta = 1.0e^{-5}$ (b)  $\beta = 1.0e^5$ Figura 5.2:  $\alpha = 1.0$  e  $\gamma = 1.0$ (a)  $\gamma = 1.0e^{-8}$ (b)  $\gamma = 1.0e^{-2}$ Figura 5.3:  $\alpha = 1.0$  e  $\beta = 1.0$ 

Podemos observar, a partir dos resultados obtidos nesta primeira estimativa, que as figuras 5.1(a), 5.2(a) e 5.3(a) apresentam resultados mais compatíveis com o esperado. Portanto:

- O valor de  $\alpha$  deve estar mais próximo de  $1.0e^{-5}$  do que de  $1.0e^5$ ;
- O valor de  $\beta$  deve estar entre  $1.0e^{-5}$  e  $1.0e^5$ , mas mais próximo de  $1.0e^{-5}$ ;
- o valor de  $\gamma$  deve estar mais perto de  $1.0e^{-8}$  do que de  $1.0e^{-2}$ .

Com esta primeira estimativa, foram definidos os seguintes intervalos para um ajuste mais refinado:

- $1.0e^{-5} < \alpha < 1.0e^{-1}$ ;
- $1.0e^{-2} < \beta < 1.0e^2$ ;

- $1.0e^{-7} < \gamma < 1.0e^{-5}$ .

Com isso, foram obtidos os valores de raios de borramento normalizados (tabelas: 7.1 e 7.2), ou seja, em relação ao valor calculado utilizando o raio do objeto real.

Como o BR está normalizado em relação ao BR do cilindro real, o valor unitário representa a situação ideal. Portanto, busca-se obter um resultado que tenha BR normalizado próximo de um.

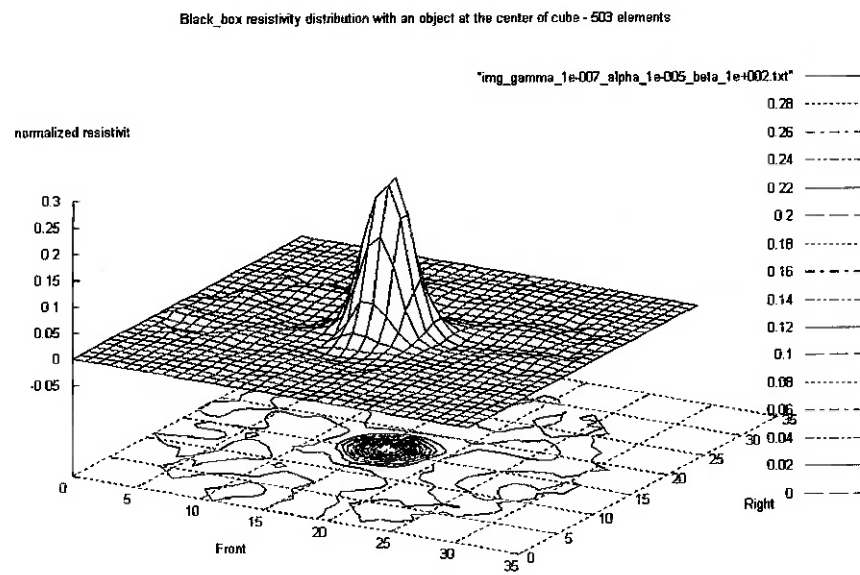
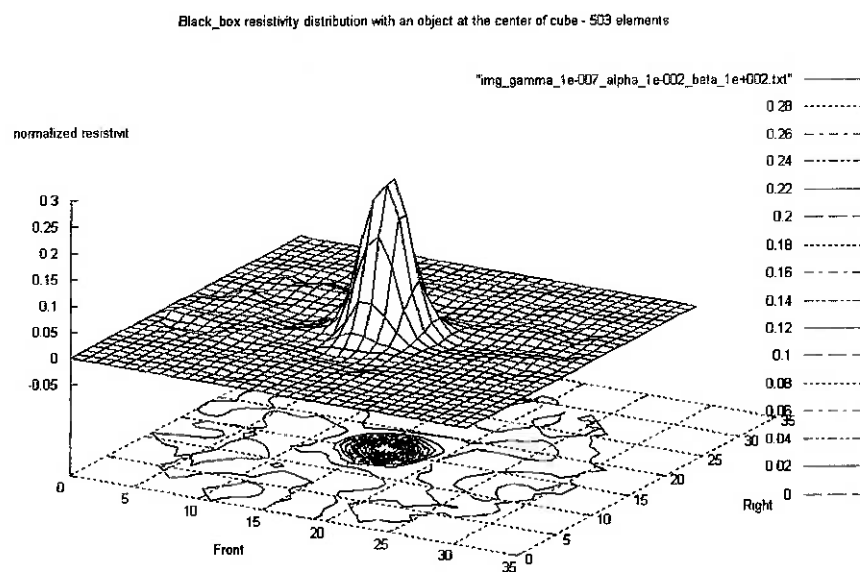
Sabemos que o  $\gamma$  é o responsável pela regularização de Tikhonov, e que influencia diretamente na matriz mal-posta. Dessa forma, um valor muito alto de  $\gamma$  anularia os efeitos dos outros parâmetros. Portanto devemos buscar um valor de  $\gamma$  pequeno o suficiente para não interferir no funcionamento dos outros parâmetros, mas que seja grande o suficiente para regularizar a matriz  $\Theta\Theta^T$ .

Como as informações de interesse para uso clínico são as contidas no centro do domínio, serão feitas análises utilizando os dados do cilindro na posição 1 para se chegar a um conjunto de parâmetros ótimos. Posteriormente, utilizando estes parâmetros, será feita a análise na posição 2 para efeito de validação. Como a posição 1 é no centro e a posição 2 na borda do domínio, um resultado satisfatório nestas duas posições garantirá uma imagem boa nas posições intermediárias do domínio.

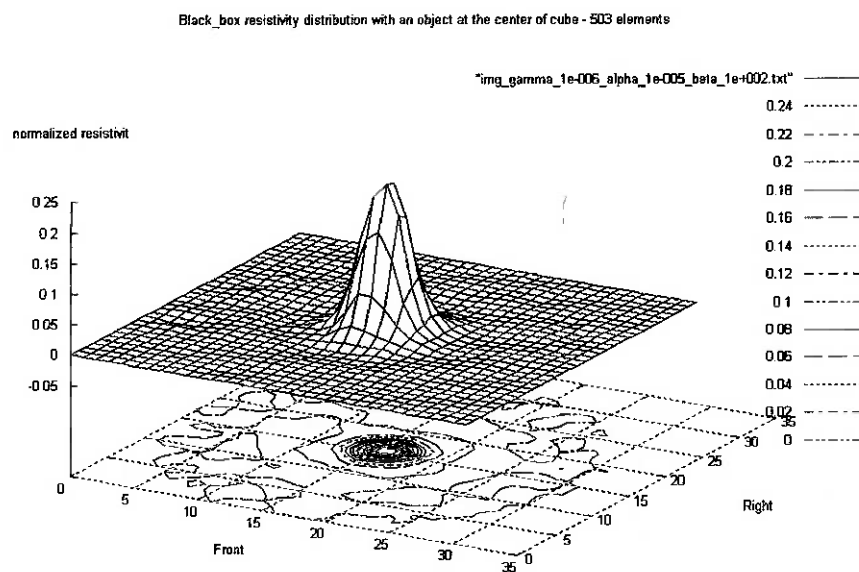
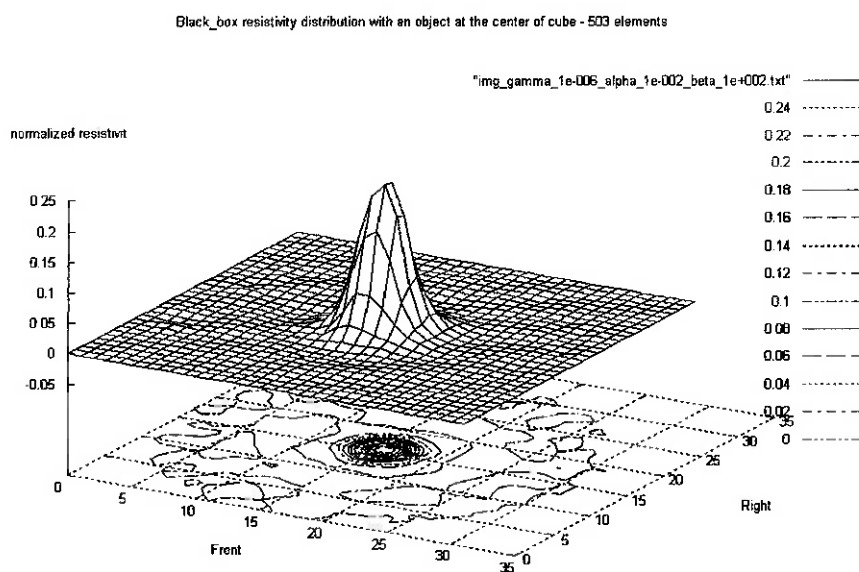
Observando os dados da tabela 7.1, notamos que para  $\gamma = 1.0e^{-5}$ , os valores de BR quase não variam com a variação dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Portanto, este valor de  $\gamma$  é muito alto para ser utilizado.

Para o cilindro na posição 1, observamos que BR normalizado mais próximo de valor unitário é o 1.033896. Plotando as imagens (fig.: 5.4(a) e 5.4(b)) podemos observar uma boa imagem, porém com um valor de resistividade normalizada baixo.



(a)  $\alpha = 1.0e^{-5}$ (b)  $\alpha = 1.0e^{-2}$ Figura 5.4:  $\beta = 1.0e^2$  e  $\gamma = 1.0e^{-7}$  para cilindro em posição 1

Testando para o valor de  $\gamma = 1.0e^{-6}$ , o BR mais próximo de unitário é 1.089822.  
Plotando as imagens, obtemos as figuras 5.5(a) e 5.5(b).

(a)  $\alpha = 1.0e^{-5}$ (b)  $\alpha = 1.0e^{-2}$ Figura 5.5:  $\beta = 1.0e^2$  e  $\gamma = 1.0e^{-6}$  para cilindro em posição 1

Apesar da imagem ser boa, a resistividade normalizada diminuiu ainda mais. Analisando os valores de pico das imagens (tabela 7.4), podemos observar que os parâ-

metros encontrados anteriormente apresentam os menores valores de pico da resistividade normalizada. Como o objetivo é encontrar um conjunto de parâmetros que nos forneça uma sensibilidade uniforme, com boa resolução espacial, devem ser analisados também os valores de pico.

A partir da tabela 7.2, podemos perceber que na borda, o valor  $\beta = 1.0e^2$  apresenta  $BR = 0$ . Olhando a imagem gerada, pode-se perceber que existe uma depressão no centro da imagem que não condiz com a realidade (fig.: 5.6(a) e 5.6(b)) e que anularia os valores do BR.

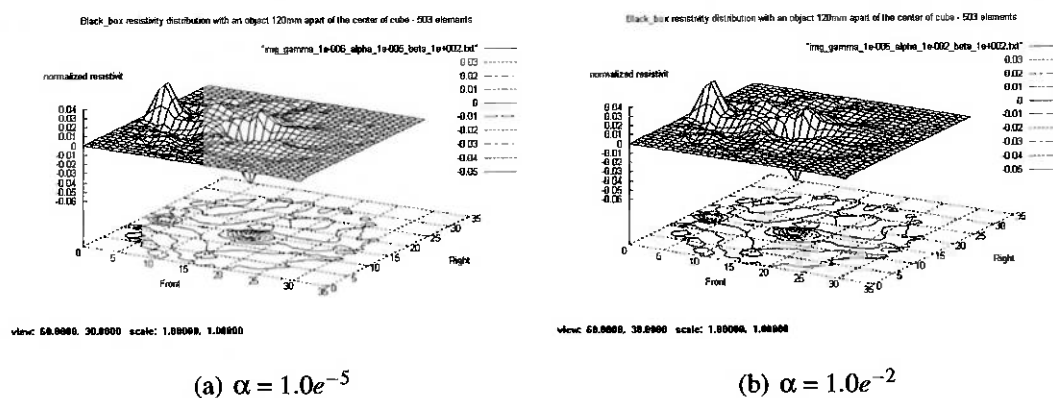
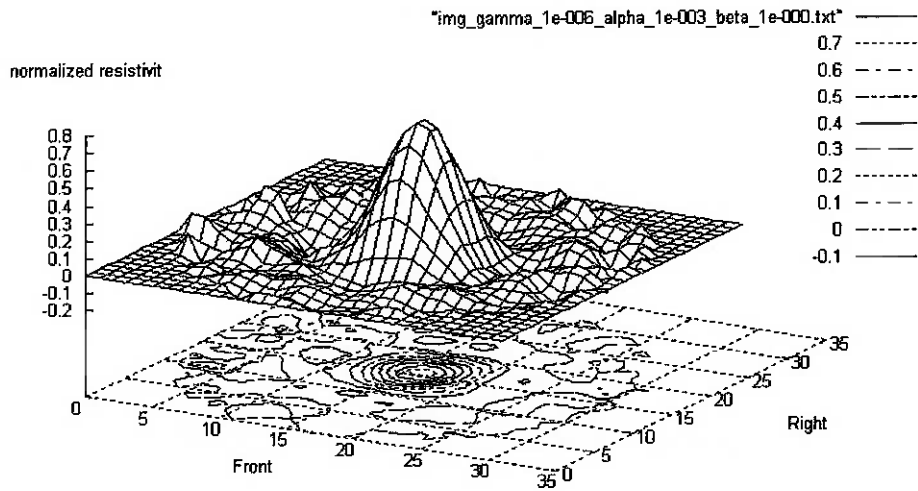


Figura 5.6: Ambos com  $\beta = 1.0e^2$  e  $\gamma = 1.0e^{-6}$  para cilindro em posição 2

Dessa forma, analisando os dados das tabelas 7.5 e 7.6, pode-se notar que para  $\beta=1.0e^0$  encontram-se valores de pico mais próximos para as posições 1 e 2, apesar dos raios de borramento serem piores para este parâmetro na posição 1. Plotando as imagens (fig.: 5.7(a) e 5.7(b)) podemos perceber que elas são compatíveis com o esperado. Olhando novamente para as tabelas 7.5 e 7.6, percebe-se que o parâmetro  $\alpha$  tem pouca influência nos resultados de BR e de valores de pico. Portanto, um terceiro ajuste será realizado variando apenas o parâmetro  $\beta$ , fixando o parâmetro  $\gamma$  em  $1.0e^{-6}$  (devido ao valor de pico na borda, para minimizar o intervalo de variação do valor de pico), e fixando arbitrariamente o valor de  $\alpha$  em  $1.0e^{-3}$ , uma vez que ele tem pouca influência devido aos valores de outros parâmetros.

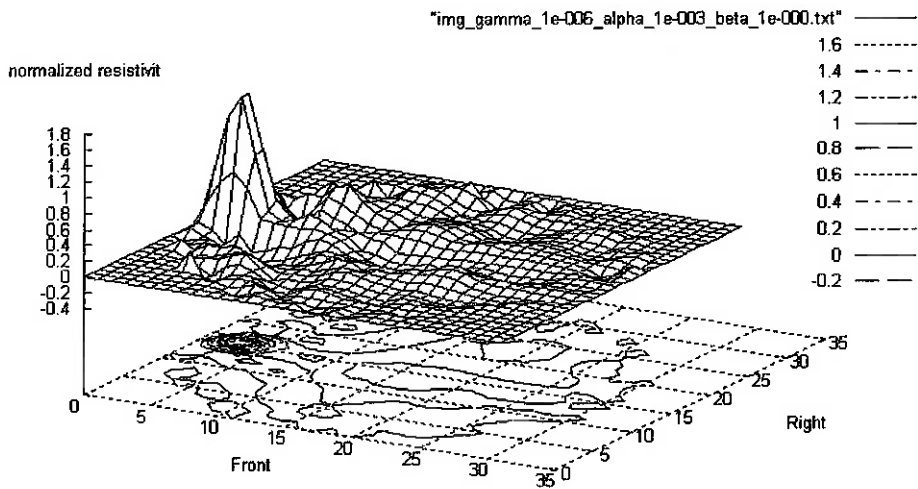
Black\_box resistivity distribution with an object at the center of cube - 503 elements



view: 60.0000, 30.0000 scale: 1.00000, 1.00000

(a) Posição 1

Black\_box resistivity distribution with an object 120mm apart of the center of cube - 503 elements



view: 60.0000, 30.0000 scale: 1.00000, 1.00000

(b) Posição 2

Figura 5.7: Ambos com  $\alpha = 1.0e^{-3}$ ,  $\beta = 1.0e^0$  e  $\gamma = 1.0e^{-6}$

$\gamma=1.0e^{-6}$ e $\alpha=1.0e^{-3}$					
Posição 1			Posição 2		
$\beta$	BR	Pico	$\beta$	BR	Pico
1.0	1.242588	0.750154	1.0	0.689264	1.669920
2.0	1.242588	0.737850	2.0	0.689264	1.177340
3.0	1.242588	0.725471	3.0	0.596920	0.909207
4.0	1.242588	0.713119	4.0	0.596920	0.740564
5.0	1.242588	0.700872	5.0	0.596920	0.624699
6.0	1.242588	0.688787	6.0	0.596920	0.540187
7.0	1.242588	0.676906	7.0	0.596920	0.475817
8.0	1.242588	0.665256	8.0	0.596920	0.425156
9.0	1.242588	0.653859	9.0	0.596920	0.384245

Tabela 5.1: Valores de BR e de pico variando  $\beta$ 

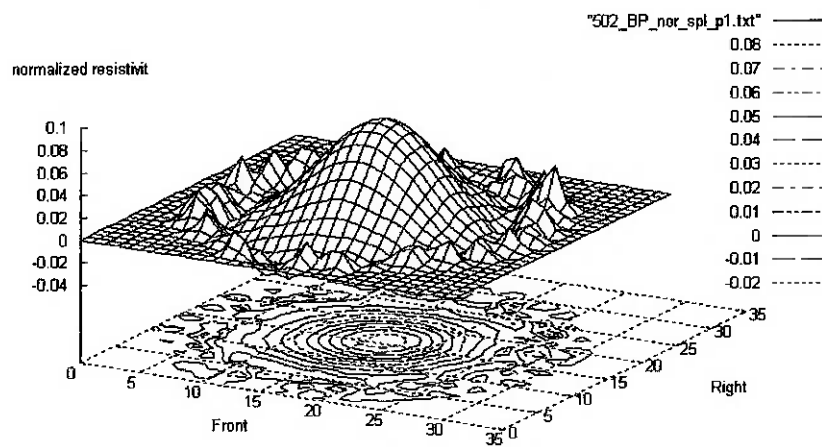
Analisando a tabela 5.1, pode-se perceber que para  $\beta=4.0$ , os valores de pico tanto na borda como no centro da cuba apresentam praticamente a mesma amplitude. Sendo então o valor de escolha para este parâmetro.

## 5.2 Comparação dos algoritmos

Nesta seção serão comparados os algoritmos de retro-projeção, de retro-projeção filtrada, o caixa-preta com índice de erro heurístico e o com índice de erro coluna de **B**.

Como foi dito anteriormente, as imagens geradas pelos algoritmos de retro-projeção apresentam sensibilidade não uniforme, como podem ser vistos nas figuras 5.8(a), 5.8(b), 5.9(a) e 5.9(b). Podemos perceber que tanto no de retro-projeção simples como no de retro-projeção filtrada, a imagem na borda apresenta um pico de resistividade bem superior à imagem no centro da cuba (4,5 vezes para o de retro-projeção simples e 8 vezes no de retro-projeção filtrada).

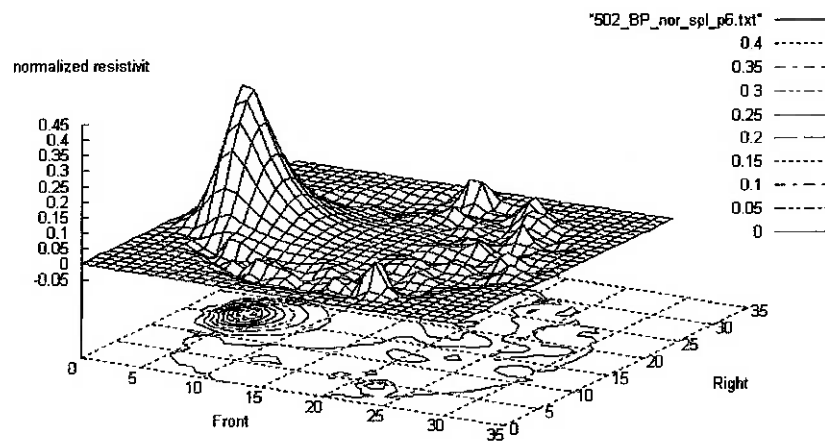
BP resistivity distribution with an object at the center of container - 502 elements



view: 60.0000, 30.0000 scale: 1.00000, 1.00000

(a) Posição 1

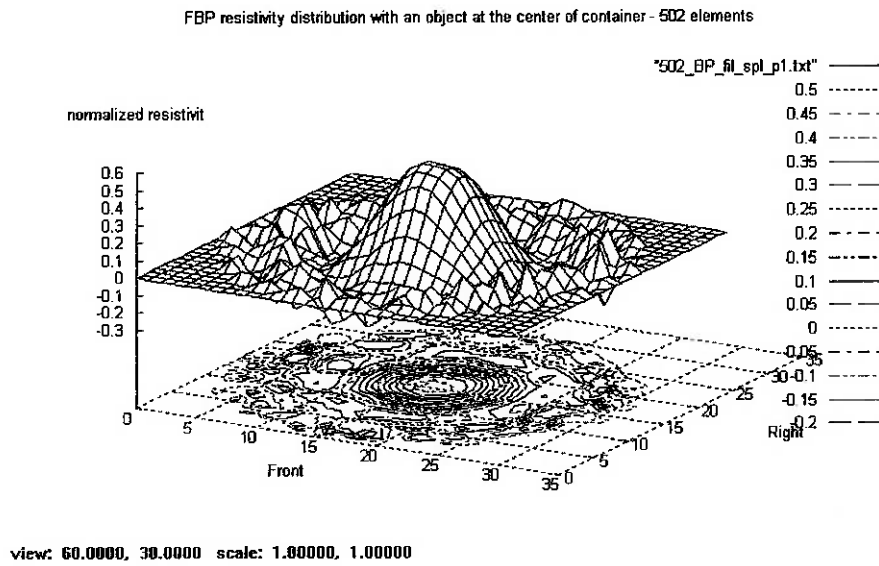
BP resistivity distribution with an object 120mm apart of the center of container - 502 elements



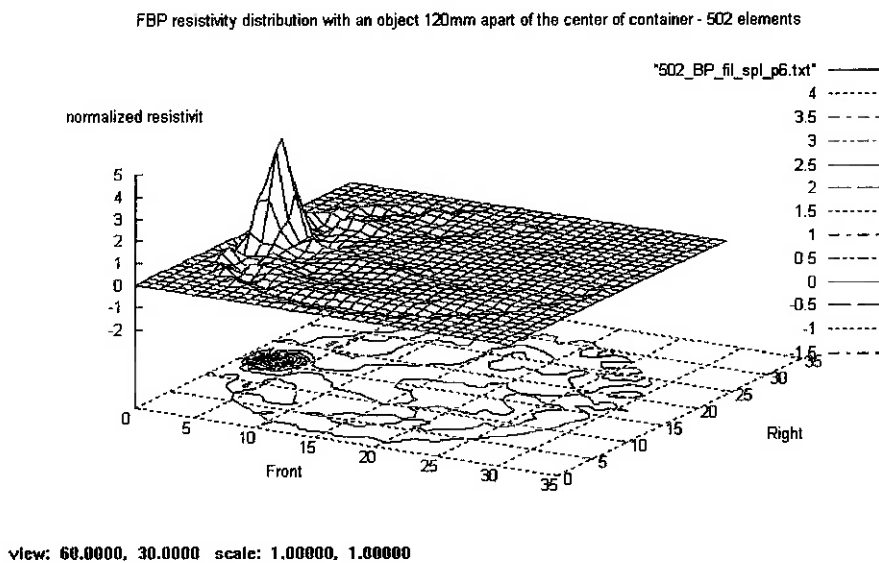
view: 60.0000, 30.0000 scale: 1.00000, 1.00000

(b) Posição 2

Figura 5.8: Retro-Projeção Simples



(a) Posição 1

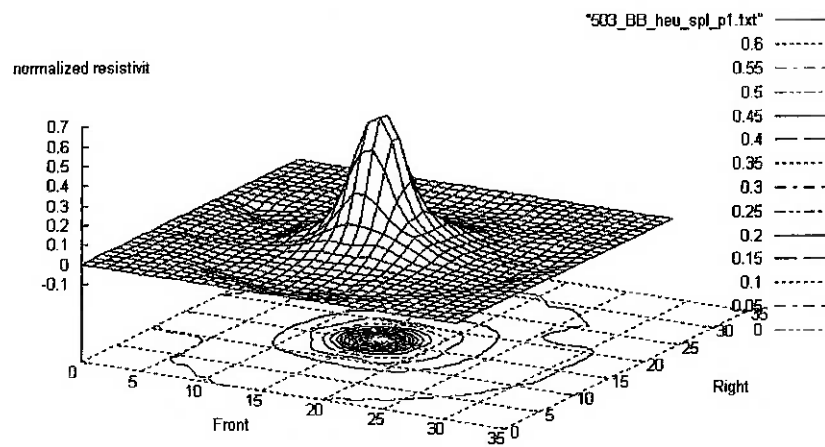


(b) Posição 2

Figura 5.9: Retro-Projeção Filtrada

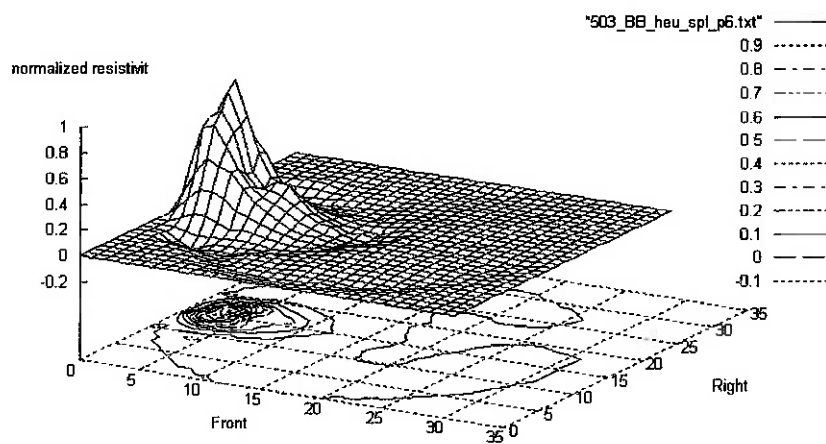
No caso dos algoritmos caixa-preta, obtemos uma imagem mais uniforme, tendo uma variação de 40% no heurístico e praticamente invariável na coluna de B.

BB resistivity distribution with an object at the center of container - heuristic



(a) Posição 1

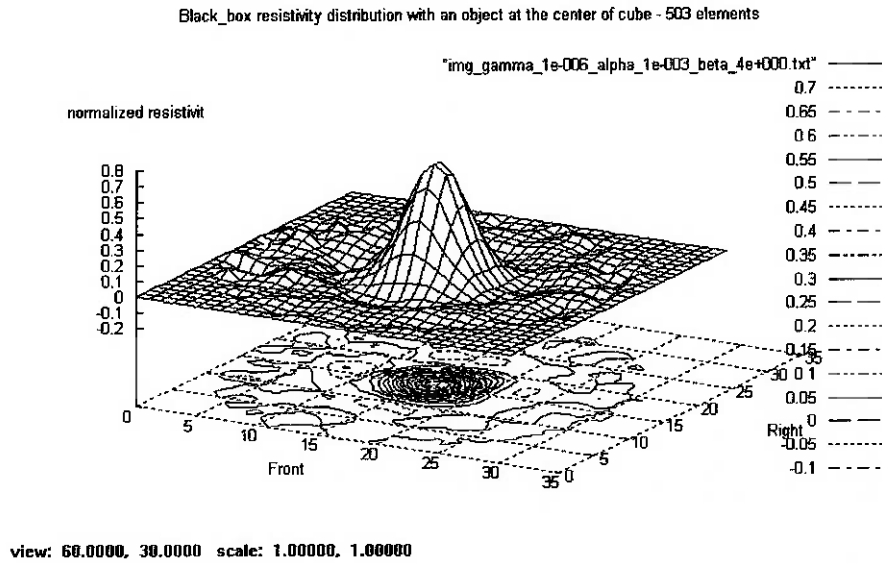
BB resistivity distribution with an object 120mm apart of the center of container - heuristic



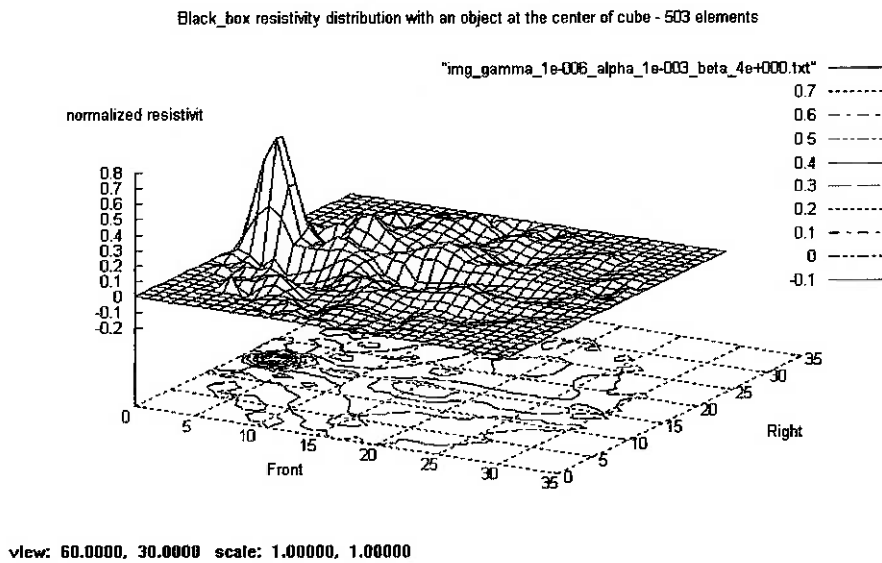
(b) Posição 2

Figura 5.10: Caixa-Preta - Heurística





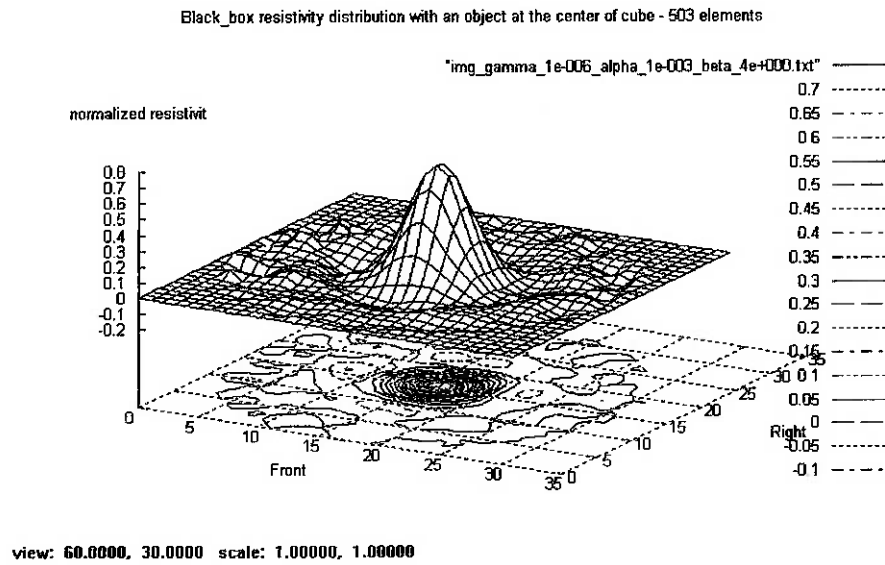
(a) Posição 1



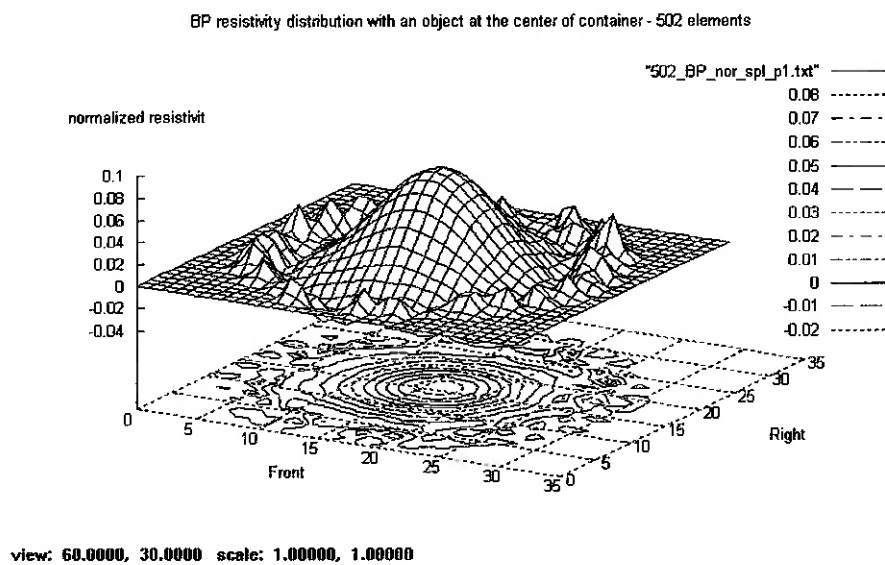
(b) Posição 2

Figura 5.11: Caixa-Preta - Coluna de B

Em termos de resolução espacial, comparando o **caixa-preta coluna de B** com os outros algoritmos, temos que na posição 1, ele é melhor (com maior resistividade normalizada), do que os outros algoritmos.

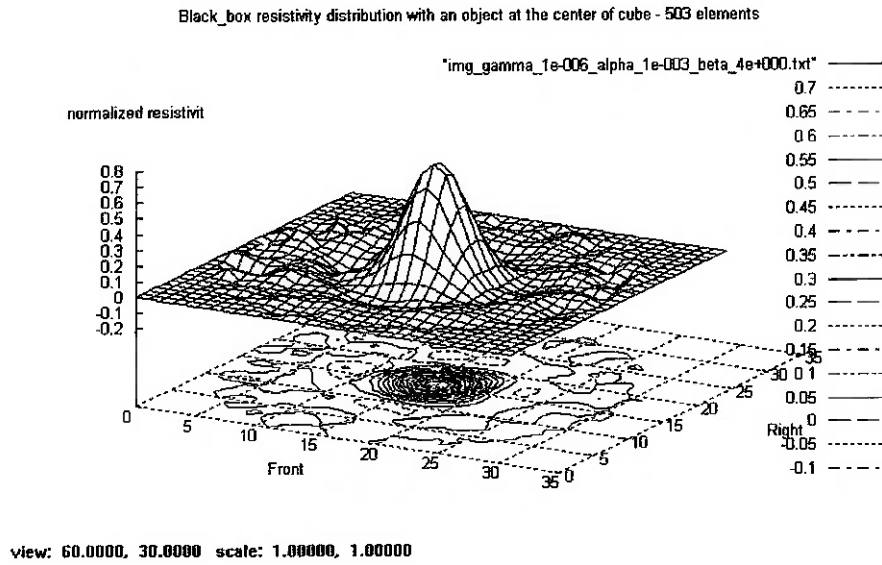


(a) Coluna de B

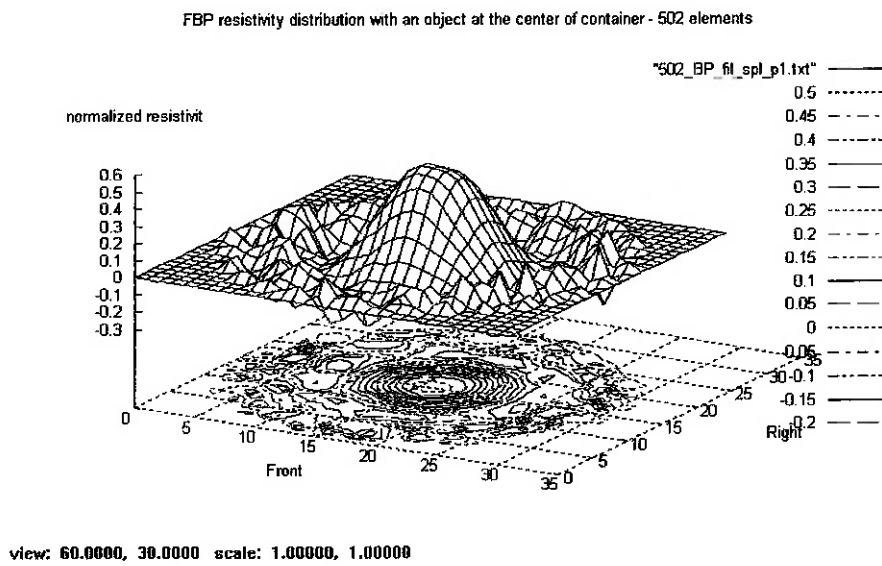


(b) Retro-Projeção simples

Figura 5.12: Caixa-Preta - Coluna de B X Retro-Projeção Simples

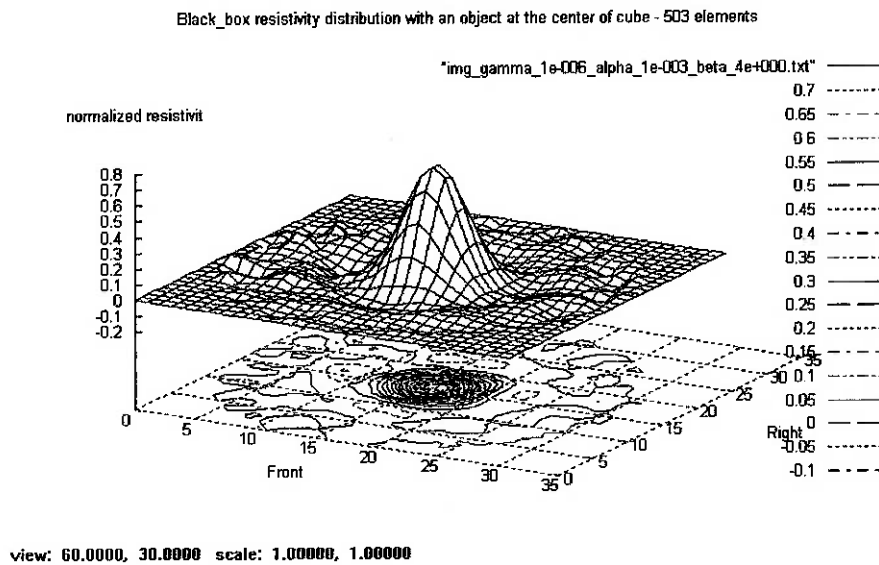


(a) Coluna de B

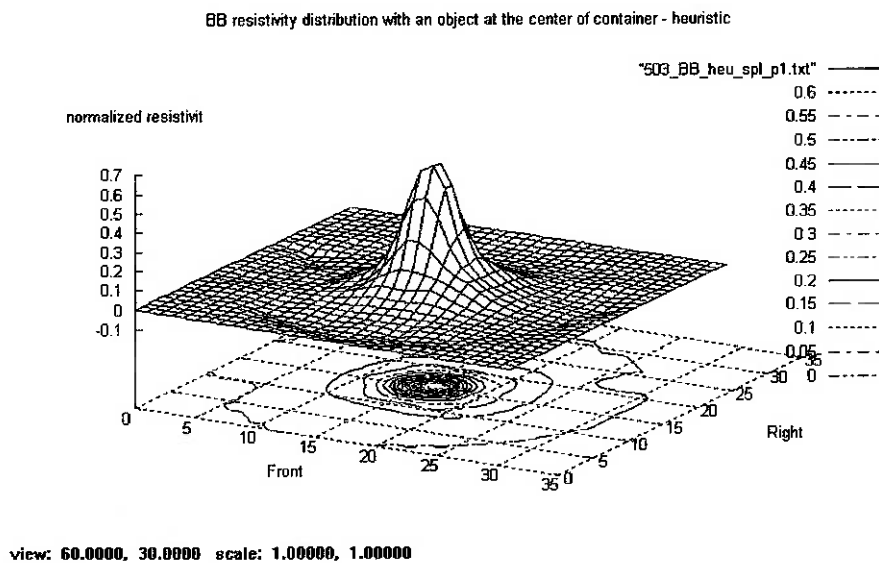


(b) Retro-Projeção Filtrada

Figura 5.13: Caixa-Preta - Coluna de B X Retro-Projeção Filtrada



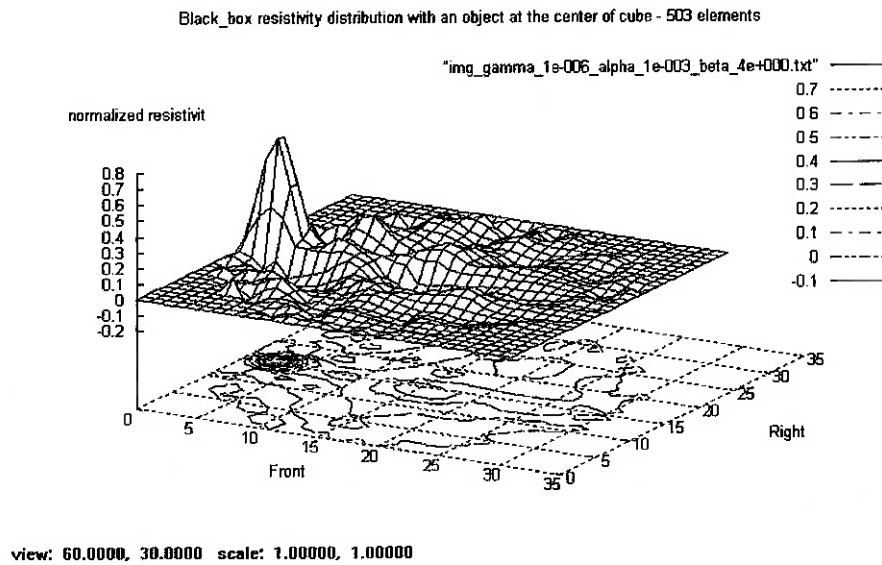
(a) Coluna de B



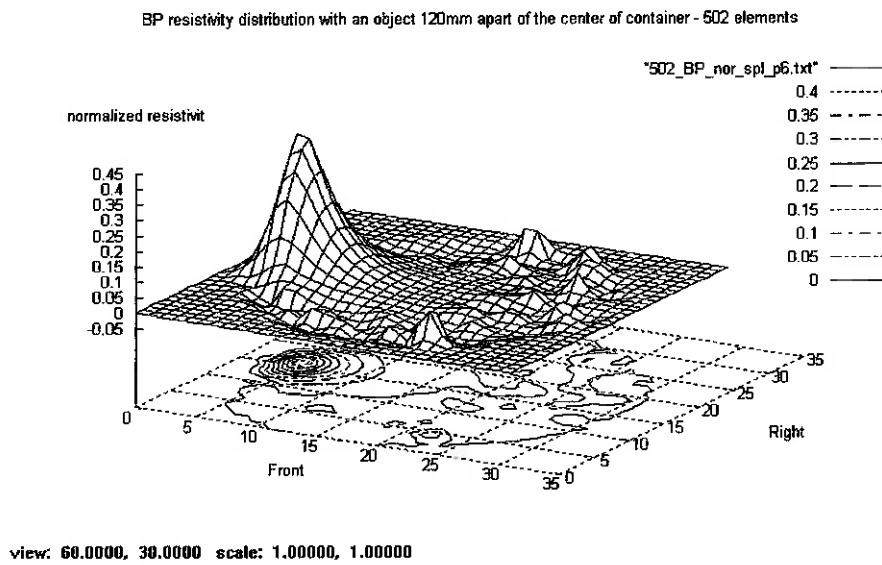
(b) Heurística

Figura 5.14: Caixa-Preta - Coluna de B X Heurística

Na posição 2, temos que a resistividade normalizada do caixa-preta coluna de B só é maior do que a de retro-projeção simples. Isto se deve a não uniformidade dos outros algoritmos, aumentando nas bordas e diminuindo no centro dos domínios.

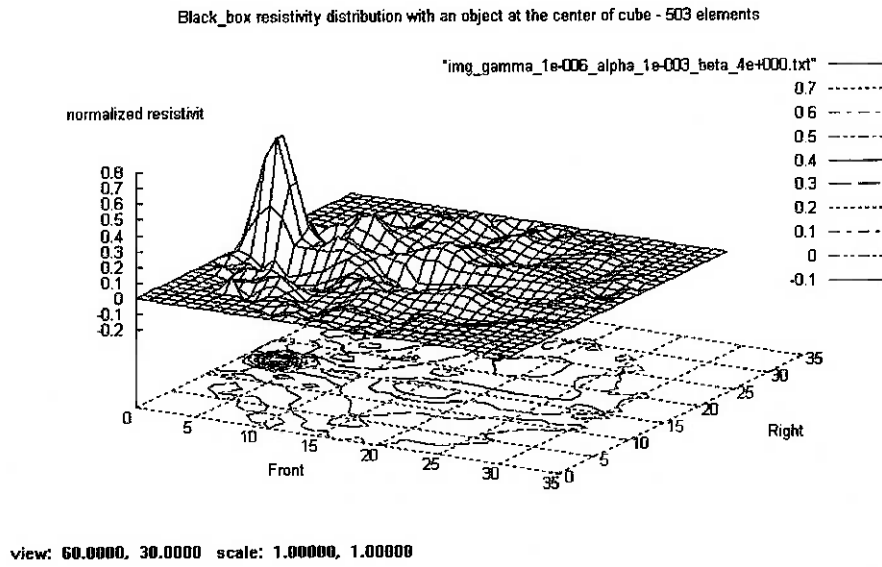


(a) Coluna de B

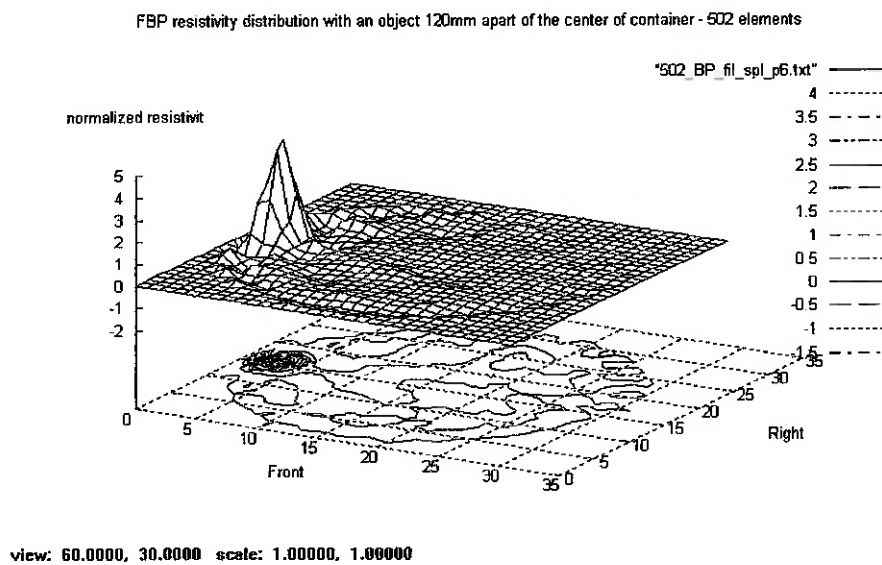


(b) Retro-Projeção simples

Figura 5.15: Caixa-Preta - Coluna de B X Retro-Projeção Simples

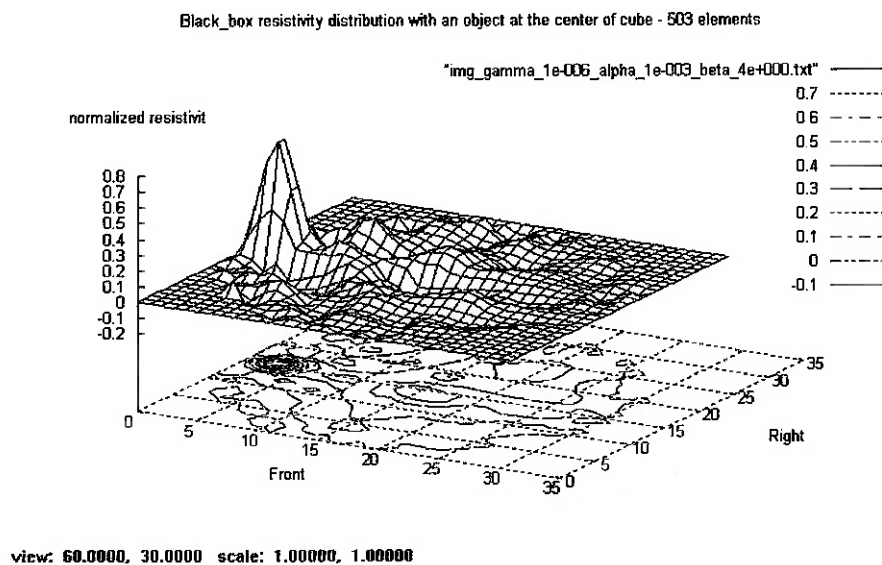


(a) Coluna de B

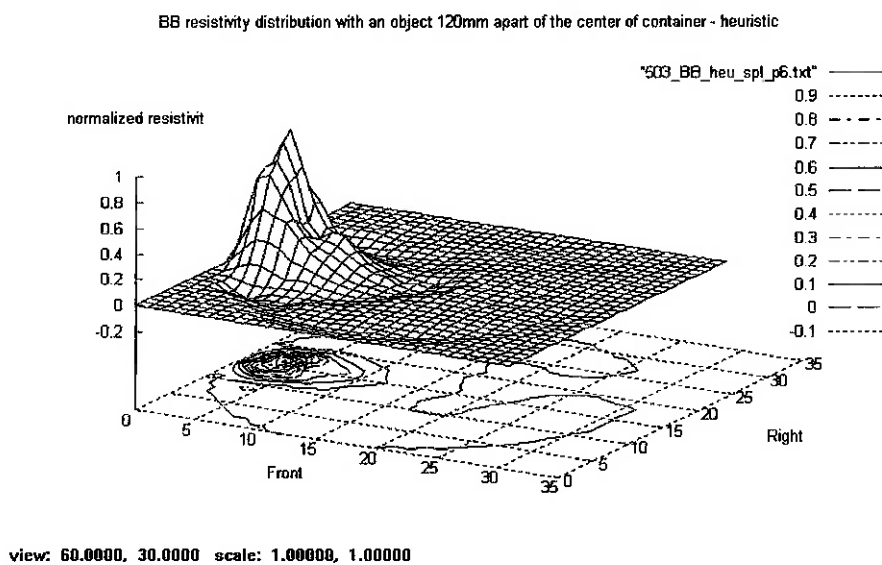


(b) Retro-Projeção Filtrada

Figura 5.16: Caixa-Preta - Coluna de B X Retro-Projeção Filtrada



(a) Coluna de B



(b) Heurística

Figura 5.17: Caixa-Preta - Coluna de B X Heurística

Em termos de raios de borrando, podemos observar na tabela que os algoritmos caixa-preta (coluna de B ou heurística) apresentam os valores de resistividade normalizado próximos de um, sendo, portanto melhores que os de retro-projeção.

	Retro-Projeção Simples	Retro-Projeção Filtrada
pos1	2,820945	1,462152
pos2	1,378527	0,487381
	Heurística	Coluna de B
pos1	1,193838	0,713119
pos2	0,974771	0,740564

Tabela 5.2: Valores de BR normalizados



## 6 CONCLUSÃO

Devido a uma distribuição mais uniforme de resistividade normalizada, pode-se afirmar que a sensibilidade dos algoritmos caixa-preta são mais uniformes comparados com os de retro-projeção. Com isso há uma valorização das informações no centro do domínio, o que é importante para uso clínico.

Houve também melhora na resolução dos algoritmos caixa-preta em relação aos de retro-projeção, sendo os valores de resistividade normalizada maiores.

A regularização dos parâmetros para o caixa-preta coluna de B deve ser feita com cautela, uma vez que o critério de raio de borramento pode não ser suficiente para a geração de uma imagem nítida e fidedigna.

Nos testes foram observados que o filtro passa alto  $F^T F$  apresenta pouca influência no resultado final, em comparação com os outros dois parâmetros. Isto provavelmente é devido a influência dos outros neste.

No entanto, como pode ser observado, os parâmetros devem ser avaliados diretamente pelas imagens resultantes e o uso de apenas um cilindro dentro da cuba pode não ser suficiente para a melhor avaliação destes parâmetros. Para melhor avaliação do seu uso clínico, é necessário testes com seres vivos (humanos ou animais), obtendo resultados mais adequados ao seu uso.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou a implementação de quatro métodos de estimação de imagem para Tomografia por Impedância Elétrica, sendo agrupados em dois grupos principais: a de retro-projeção e a de caixa-preta.

Atualmente o algoritmo de caixa-preta está sendo avaliado em diversos hospitais do mundo, entre eles Harvard Medical e Hospital das Clínicas da Universidade de São Paulo. Desta forma, os parâmetros de regularização estão sendo aperfeiçoados para prática clínica.

No futuro, deve-se analisar uma melhor forma de se avaliar os algoritmos de estimação de imagens para TIE, além do método de raio de borramento, uma vez que ele não atende a todas as necessidades, aprimorar os critérios de escolha para os parâmetros de regularização, e investigar outros índices de erro para se obter resultados melhores.

## Referências Bibliográficas

- [1] ADLER, A. **Measurement of Pulmonary Function With Electrical Impedance Tomography** 1995. 131p. Dissertação (Doutorado) - École Polytechnique De Montréal, Université De Montréal. Montreal, 1995.
- [2] AMATO M.B.P.; BARBAS C.S.V.; MEDEIROS D.M.; MAGALDI R.B.; SCETTINO G.P.; LORENZI-FILHO G.; KAIRALLA R.A.; DEHEINZELIN D.; MUNOZ C.; OLIVEIRA R.; TAKAGAKI T.Y.; CARVALHO C.R.R. Effect of a Protective-Ventilation Strategy on Mortality in the Acute Respiratory Distress Syndrome. **New England Journal Medicine**, Vol. 338, p.347-354, 1998.
- [3] AVIS, N.J.; BARBER, D.C. Incorporating a priori information into the Sheffield filtered backprojection algorithm. **Physiological Measurement** V. 16, p.A111-A122, 1995.
- [4] BARBAS, C.S.V.; ROTHMAN A.; AMATO, M.B.P.; RODRIGUES JUNIOR, M. Técnicas de Assistência Ventilatória. In: KNOBEL E. **Condutas no Paciente Grave**. São Paulo: Editora Atheneu, 1994, p.312-346.
- [5] BARBER, D.C.; BROWN, B.H. Applied Potential Tomography. **Journal of Physics E: Scientific Instruments**, Vol. 17, p.723-733, 1984.
- [6] BROWN, B.H.; SEAGAR, A.D. Sheffield Data Collection System. **Clinical Physics and Physiological Measurement**, Vol. 8, p.91-97, 1986, supp A.
- [7] BROWN, B.H. Medical impedance tomography and process impedance tomogra-

- phy: A brief review. **Measurement Science and Technology**, Vol. 12, p.991-996, 2001.
- [8] BROWN, B.H. Electrical impedance tomography (EIT): a review. **Journal of Medical Engineering & Technology**, Vol. 27, n.3, p.97-108, 2003.
- [9] GUYTON, A.C.; HALL, J.E. **Tratado de fisiologia Médica** Rio de Janeiro: Guanabara-Koogan, 2002. 1008p.
- [10] HARRIS, N.D.; SUGGETT, A.J.; BARBER, D.C.; BROWN, B.H. Applications Of Applied Potential Tomography (APT) In Respiratory Medicine. **Clinical Physics and Physiological Measurement**, Vol. 8, p.155-165, 1986, supp A.
- [11] HARRIS, N.D.; SUGGETT, A.J.; BARBER, D.C.; BROWN, B.H. Applied potential tomography: A new technique for monitoring pulmonary function. **Clinical Physics and Physiological Measurement**, Vol. 9, p.79-85, 1988, supp A.
- [12] KAIPIO, J.P.; KOLEHMAINEN, V.; SOMERSALO, E.; VAUHKONEN, M. Statistical inversion and Monte Carlo sampling methods in electrical impedance tomography. **Inverse Problems** V. 16, n.5, p.1487-1522, 2000.
- [13] KAIPIO, J.P.; SOMERSALO, E. **Statistical and Computational Inverse Problems**. New York: Springer, 2004. 344p.
- [14] LOGAN, D.L. **A First Course in the Finite Element Method**. Pacific Grove: Thomson-Engineering, 2002. 720p.
- [15] METHERALL, P. **Three Dimensional Electrical Impedance Tomography of the Human Thorax**. 1998. 220p. Dissertação (Doutorado) - Department of Medical Physics and Clinical Engineering, University of Sheffield. Sheffield, 1998.
- [16] MIRANDA, D.A.A. **Algoritmo de Tomografia por Impedância Elétrica baseado em Newton-Raphson**. 2000. 89p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2000.

- [17] MOLINA, N.A.V. **Redução de erro numérico no filtro estendido de Kalman aplicado à tomografia por impedância elétrica** 2002. 108p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002.
- [18] NOPP, P.; RAPP, E.; PFÜTZNER, H.; NAKESCH, H.; RUHSAM Ch. Dielectric Properties of Lung Tissue as a Function of Air Content. **Physics in Medicine and Biology** V. 38, n.6, p.699-716, 1993.
- [19] PAI, C.N.; AYA, J.C.C.; LIMA, R.G. An implementation of the back-projection algorithm according to santosa and vogelius. In: **TECHNOLOGY MEETS SURGEON INTERNATIONAL**, São Paulo, 2005. **TMSi:proceedings**. São Paulo: TMSi, 2005. tmsi\_16.pdf. 1 CD-ROM.
- [20] PAI, C.N.; MOURA, F.S.; SCHWEDER, R.K.; MIRANDOLA, L.A.S.; AYA, J.C.C.; LIMA, R.G. A Black-Box Back-Projection Algorithm For Electrical Impedance Tomography. In: **COBEM2005**, Ouro Preto, 2005. **Proceedings of COBEM2005**. Ouro Preto:ABCM, 2005. 1 CD-ROM.
- [21] PRESS, W.H.; TEUKOLSKY, S.A.; VETTERLING, W.T.; FLANNERY, B.P. **Numerical Recipes in C: the art of scientific computing**. 2.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [22] SANTOSA, F.; VOGELIUS, M. Backprojection algorithm for electrical impedance imaging. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, Vol. 50, p.216-243, 1990.
- [23] THE ACUTE RESPIRATORY DISTRESS SYNDROME NETWORK. Ventilation With Lower Tidal Volumes As Compared With Traditional Tidal Volumes For Acute Lung Injury And The Acute Respiratory Distress Syndrome. **New England Journal Medicine**, Vol. 342, p.1301-1308, 2000.
- [24] TOBIN, M.J. Medical Progress: Advances in Mechanical Ventilation. **New England Journal Medicine**, Vol. 344, p.1986-1996, 2001.

- [25] TRIGO, F.C. **Filtro Estendido de Kalman aplicado à Tomografia de Impedância Elétrica** 2001. 95p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001.
- [26] YORKEY, T.J.; WEBSTER, J.G. Comparison Of Impedance Tomographic Reconstruction Algorithms. **Clinical Physics and Physiological Measurement**, Vol. 8, p.55-62, 1986, supp A.

# APÊNDICE A

Pelas leis de Maxwell, temos:

$$\nabla \cdot E = \rho / \epsilon_r \epsilon_0 \quad (7.1)$$

$$\nabla \times E = 0 \quad (7.2)$$

onde  $\nabla$  é o operador gradiente,  $E$  é o campo elétrico,  $\rho$  é a densidade de carga,  $\epsilon_r$  e  $\epsilon_0$  são as permitividades espaciais relativa e do vácuo.

O campo elétrico em termos de potencial elétrico  $U$  pode ser expresso como:

$$E = -\nabla U \quad (7.3)$$

No problema direto, considerando a forma geral da lei de Ohm para um ponto dentro de um condutor ôhmico, temos:

$$J = \sigma \cdot E \quad (7.4)$$

onde  $J$  é a densidade de corrente e  $\sigma$  a condutividade. Como não há fonte de corrente no interior do meio, então:

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (7.5)$$

combinando as equações 7.3, 7.4 e 7.5, temos:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla U) = 0 \quad (7.6)$$

Dessa forma, obtemos os seguintes modelos matemáticos:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla U) = 0 \text{ em } \Omega \quad (7.7)$$

$$\sigma \frac{\partial U}{\partial n} = J \text{ em } \partial\Omega \quad (7.8)$$

Tendo uma pequena perturbação na condutividade  $\delta\sigma$  e o seu correspondente  $\delta U$ , as equações 7.7 e 7.8 se tornam:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \delta U) + \nabla \cdot (\delta\sigma \nabla U) = 0 \text{ em } \Omega \quad (7.9)$$

$$\sigma \frac{\partial (\delta U)}{\partial n} + \delta\sigma \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (7.10)$$

Assumindo  $\Omega$  uma esfera unitária,  $\sigma = 1$  e  $\delta\sigma = 0$  perto do dipolo, definido como ponto médio entre dois eletrodos:

$$\nabla^2 \delta U = -\nabla(\delta\sigma) \cdot \nabla U \text{ em } \Omega \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial (\delta U)}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (7.12)$$

E o problema inverso agora está linearizado de forma que dado  $\delta U|_{\partial\Omega}$  queremos determinar um incremento consistente de  $\delta\sigma$ .

Para resolver este problema, Barber sugere o uso de transformação conformacional (22), de acordo com a figura 7.1. Neste sistema de coordenadas, com a localização do dipolo mostrado na figura 7.1,

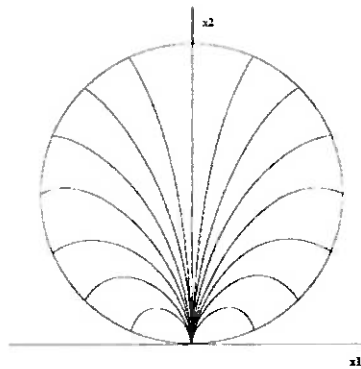


Figura 7.1: Linhas equipotenciais em coordenadas  $(x_1, x_2)$

$$U = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad (7.13)$$



$$V = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad (7.14)$$

onde  $x_1$  e  $x_2$  são as coordenadas do ponto em questão. Com isso podemos mapear o domínio  $\Omega$  no semiplano  $P = \{V > \frac{1}{2}\}$  e o problema das equações 7.11 e 7.12 simplifica no plano  $(U, V)$ :

$$\nabla^2 \delta U = -\frac{\partial(\delta\sigma)}{\partial U} \text{ em } P \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial(\delta U)}{\partial V} = 0 \text{ em } \partial P = \left\{ V = \frac{1}{2} \right\} \quad (7.16)$$

Ainda de acordo com Barber (5), a solução desta equação pode ser aproximada para:

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma_0} = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\delta U}{U_0} (2V - 1) \quad (7.17)$$

onde  $\frac{\delta\sigma}{\sigma_0}$  é a variação de condutividade normalizada em relação a um instante inicial  $\sigma_0$ ,  $m$  é o número de eletrodos utilizados e  $\frac{\delta U}{U_0}$  é a variação de potencial elétrico normalizada.

Na equação 7.17, Barber e Brown utilizam condutividade normalizada, ou seja, a variação de condutividade sobre a condutividade homogênea. Teoricamente a condutividade homogênea deve ser calculada. Mas na prática utiliza-se dados experimentais tomados num certo instante inicial.

## APÊNDICE B

Aqui neste apêndice estão apresentadas as tabelas contendo os índices de raios de borramento (BR) e com os valores de pico de resistividade obtidos a partir da variação dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$

$\gamma=10e^{-5}$			$\gamma=10e^{-6}$			$\gamma=10e^{-7}$		
$\alpha$	$\beta$	BR	$\alpha$	$\beta$	BR	$\alpha$	$\beta$	BR
10e-1	10e0	0.689264	10e-1	10e2	0.000000	10e-1	10e2	0.000000
			10e-1	10e1	0.596920	10e-1	10e1	0.487383
			10e-1	10e0	0.689264	10e-1	10e0	0.689264
			10e-1	10e-1	0.689264	10e-1	10e-1	0.770620
			10e-1	10e-2	0.689264	10e-1	10e-2	0.689264
10e-2	10e0	0.689264	10e-2	10e2	0.000000	10e-2	10e2	0.000000
			10e-2	10e1	0.596920	10e-2	10e1	0.487383
			10e-2	10e0	0.689264	10e-2	10e0	0.689264
			10e-2	10e-1	0.689264	10e-2	10e-1	0.770620
			10e-2	10e-2	0.689264	10e-2	10e-2	0.689264
10e-3	10e0	0.689264	10e-3	10e2	0.000000	10e-3	10e2	0.000000
			10e-3	10e1	0.596920	10e-3	10e1	0.487383
			10e-3	10e0	0.689264	10e-3	10e0	0.689264
			10e-3	10e-1	0.689264	10e-3	10e-1	0.770620
			10e-3	10e-2	0.689264	10e-3	10e-2	0.689264
10e-4	10e0	0.689264	10e-4	10e2	0.000000	10e-4	10e2	0.000000
			10e-4	10e1	0.596920	10e-4	10e1	0.487383
			10e-4	10e0	0.689264	10e-4	10e0	0.689264
			10e-4	10e-1	0.689264	10e-4	10e-1	0.770620
			10e-4	10e-2	0.689264	10e-4	10e-2	0.689264
10e-5	10e0	0.689264	10e-5	10e2	0.000000	10e-5	10e2	0.000000
			10e-5	10e1	0.596920	10e-5	10e1	0.487383
			10e-5	10e0	0.689264	10e-5	10e0	0.689264
			10e-5	10e-1	0.689264	10e-5	10e-1	0.770620
			10e-5	10e-2	0.689264	10e-5	10e-2	0.689264

Tabela 7.2: BR para cilindro na borda (Posição 2)

$\gamma=10e^{-6}$			$\gamma=10e^{-7}$		
$\alpha$	$\beta$	Pico	$\alpha$	$\beta$	Pico
10e-1	10e2	0.234002	10e-1	10e2	0.283584
10e-1	10e1	0.594658	10e-1	10e1	0.723988
10e-1	10e0	0.684546	10e-1	10e0	0.835366
10e-1	10-e1	0.693531	10e-1	10-e1	0.846547
10e-1	10-e2	0.694416	10e-1	10-e2	0.847645
10e-2	10e2	0.240107	10e-2	10e2	0.290956
10e-2	10e1	0.638041	10e-2	10e1	0.776795
10e-2	10e0	0.743670	10e-2	10e0	0.907751
10e-2	10-e1	0.754373	10e-2	10-e1	0.921113
10e-2	10-e2	0.755430	10e-2	10-e2	0.922432
10e-3	10e2	0.240734	10e-3	10e2	0.291714
10e-3	10e1	0.642727	10e-3	10e1	0.782499
10e-3	10e0	0.750154	10e-3	10e0	0.915689
10e-3	10-e1	0.761057	10e-3	10-e1	0.929305
10e-3	10-e2	0.762134	10e-3	10-e2	0.930650
10e-4	10e2	0.240797	10e-4	10e2	0.291790
10e-4	10e1	0.643199	10e-4	10e1	0.783074
10e-4	10e0	0.750808	10e-4	10e0	0.916491
10e-4	10-e1	0.761732	10e-4	10-e1	0.930132
10e-4	10-e2	0.762811	10e-4	10-e2	0.931480
10e-5	10e2	0.240803	10e-5	10e2	0.291798
10e-5	10e1	0.643246	10e-5	10e1	0.783131
10e-5	10e0	0.750874	10e-5	10e0	0.916571
10e-5	10-e1	0.761800	10e-5	10-e1	0.930215
10e-5	10-e2	0.762879	10e-5	10-e2	0.931563

Tabela 7.3: Valores de pico para cilindro no centro (Posição 1)

$\gamma=10e^{-6}$			$\gamma=10e^{-7}$		
$\alpha$	$\beta$	Pico	$\alpha$	$\beta$	Pico
10e-1	10e2	0.039331	10e-1	10e2	0.054797
10e-1	10e1	0.346341	10e-1	10e1	0.377373
10e-1	10e0	1.579430	10e-1	10e-0	1.739100
10e-1	10e-1	2.453870	10e-1	10e-1	2.722770
10e-1	10e-2	2.597780	10e-1	10e-2	2.886150
10e-2	10e2	0.039380	10e-2	10e2	0.055530
10e-2	10e1	0.350132	10e-2	10e1	0.381430
10e-2	10e0	1.661270	10e-2	10e-0	1.828380
10e-2	10e-1	2.657170	10e-2	10e-1	2.948030
10e-2	10e-2	2.826730	10e-2	10e-2	3.140510
10e-3	10e2	0.039385	10e-3	10e2	0.055604
10e-3	10e1	0.350516	10e-3	10e1	0.381841
10e-3	10e0	1.669920	10e-3	10e-0	1.837820
10e-3	10e-1	2.679380	10e-3	10e-1	2.972630
10e-3	10e-2	2.851870	10e-3	10e-2	3.168440
10e-4	10e2	0.039385	10e-4	10e2	0.055612
10e-4	10e1	0.350555	10e-4	10e1	0.381882
10e-4	10e0	1.670790	10e-4	10e-0	1.838770
10e-4	10e-1	2.681620	10e-4	10e-1	2.975110
10e-4	10e-2	2.854410	10e-4	10e-2	3.171270
10e-5	10e2	0.039385	10e-5	10e2	0.055613
10e-5	10e1	0.350559	10e-5	10e1	0.381886
10e-5	10e0	1.670880	10e-5	10e-0	1.838870
10e-5	10e-1	2.681840	10e-5	10e-1	2.975360
10e-5	10e-2	2.854660	10e-5	10e-2	3.171550

Tabela 7.4: Valores de pico para cilindro na borda (Posição 2)

$\gamma=10e^{-6}$				$\gamma=10e^{-7}$			
$\alpha$	$\beta$	BR	Pico	$\alpha$	$\beta$	BR	Pico
10e-1	10e2	1.143015	0.234002	10e-1	10e2	1.089822	0.283584
10e-1	10e1	1.242588	0.594658	10e-1	10e1	1.143015	0.723988
10e-1	10e0	1.242588	0.684546	10e-1	10e0	1.143015	0.835366
10e-1	10-e1	1.193840	0.693531	10e-1	10-e1	1.089822	0.846547
10e-1	10-e2	1.193840	0.694416	10e-1	10-e2	1.089822	0.847645
10e-2	10e2	1.089822	0.240107	10e-2	10e2	1.033896	0.290956
10e-2	10e1	1.242588	0.638041	10e-2	10e1	1.143015	0.776795
10e-2	10e0	1.242588	0.743670	10e-2	10e0	1.143015	0.907751
10e-2	10-e1	1.193840	0.754373	10e-2	10-e1	1.089822	0.921113
10e-2	10-e2	1.143015	0.755430	10e-2	10-e2	1.089822	0.922432
10e-3	10e2	1.089822	0.240734	10e-3	10e2	1.033896	0.291714
10e-3	10e1	1.242588	0.642727	10e-3	10e1	1.143015	0.782499
10e-3	10e0	1.242588	0.750154	10e-3	10e0	1.143015	0.915689
10e-3	10-e1	1.143015	0.761057	10e-3	10-e1	1.089822	0.929305
10e-3	10-e2	1.143015	0.762134	10e-3	10-e2	1.089822	0.930650
10e-4	10e2	1.089822	0.240797	10e-4	10e2	1.033896	0.291790
10e-4	10e1	1.242588	0.643199	10e-4	10e1	1.143015	0.783074
10e-4	10e0	1.242588	0.750808	10e-4	10e0	1.143015	0.916491
10e-4	10-e1	1.143015	0.761732	10e-4	10-e1	1.089822	0.930132
10e-4	10-e2	1.143015	0.762811	10e-4	10-e2	1.089822	0.931480
10e-5	10e2	1.089822	0.240803	10e-5	10e2	1.033896	0.291798
10e-5	10e1	1.242588	0.643246	10e-5	10e1	1.143015	0.783131
10e-5	10e0	1.242588	0.750874	10e-5	10e0	1.143015	0.916571
10e-5	10-e1	1.143015	0.761800	10e-5	10-e1	1.089822	0.930215
10e-5	10-e2	1.143015	0.762879	10e-5	10-e2	1.089822	0.931563

Tabela 7.5: Valores de BR e de pico para cilindro na posição 1

$\gamma=10e^{-6}$				$\gamma=10e^{-7}$			
$\alpha$	$\beta$	BR	Pico	$\alpha$	$\beta$	BR	Pico
10e-1	10e2	0.000000	0.039331	10e-1	10e2	0.000000	0.054797
10e-1	10e1	0.596920	0.346341	10e-1	10e1	0.487383	0.377373
10e-1	10e0	0.689264	1.579430	10e-1	10e0	0.689264	1.739100
10e-1	10e-1	0.689264	2.453870	10e-1	10e-1	0.770620	2.722770
10e-1	10e-2	0.689264	2.597780	10e-1	10e-2	0.770620	2.886150
10e-2	10e2	0.000000	0.039380	10e-2	10e2	0.000000	0.055530
10e-2	10e1	0.596920	0.350132	10e-2	10e1	0.487383	0.381430
10e-2	10e0	0.689264	1.661270	10e-2	10e0	0.689264	1.828380
10e-2	10e-1	0.689264	2.657170	10e-2	10e-1	0.770620	2.948030
10e-2	10e-2	0.689264	2.826730	10e-2	10e-2	0.770620	3.140510
10e-3	10e2	0.000000	0.039385	10e-3	10e2	0.000000	0.055604
10e-3	10e1	0.596920	0.350516	10e-3	10e1	0.487383	0.381841
10e-3	10e0	0.689264	1.669920	10e-3	10e0	0.689264	1.837820
10e-3	10e-1	0.689264	2.679380	10e-3	10e-1	0.770620	2.972630
10e-3	10e-2	0.689264	2.851870	10e-3	10e-2	0.770620	3.168440
10e-4	10e2	0.000000	0.039385	10e-4	10e2	0.000000	0.055612
10e-4	10e1	0.596920	0.350555	10e-4	10e1	0.487383	0.381882
10e-4	10e0	0.689264	1.670790	10e-4	10e0	0.689264	1.838770
10e-4	10e-1	0.689264	2.681620	10e-4	10e-1	0.770620	2.975110
10e-4	10e-2	0.689264	2.854410	10e-4	10e-2	0.770620	3.171270
10e-5	10e2	0.000000	0.039385	10e-5	10e2	0.000000	0.055613
10e-5	10e1	0.596920	0.350559	10e-5	10e1	0.487383	0.381886
10e-5	10e0	0.689264	1.670880	10e-5	10e0	0.689264	1.838870
10e-5	10e-1	0.689264	2.681840	10e-5	10e-1	0.770620	2.975360
10e-5	10e-2	0.689264	2.854660	10e-5	10e-2	0.770620	3.171550

Tabela 7.6: Valores de BR e de pico para cilindro na posição 2

$\gamma=10e^{-5}$			$\gamma=10e^{-6}$			$\gamma=10e^{-7}$		
$\alpha$	$\beta$	BR	$\alpha$	$\beta$	BR	$\alpha$	$\beta$	BR
10e-1	10e0	1.378527	10e-1	10e2	1.143015	10e-1	10e2	1.089822
			10e-1	10e1	1.242588	10e-1	10e1	1.143015
			10e-1	10e0	1.242588	10e-1	10e0	1.143015
			10e-1	10e-1	1.193840	10e-1	10e-1	1.089822
			10e-1	10e-2	1.193840	10e-1	10e-2	1.089822
10e-2	10e0	1.378527	10e-2	10e2	1.089822	10e-2	10e2	1.033896
			10e-2	10e1	1.242588	10e-2	10e1	1.143015
			10e-2	10e0	1.242588	10e-2	10e0	1.143015
			10e-2	10e-1	1.193840	10e-2	10e-1	1.089822
			10e-2	10e-2	1.242588	10e-2	10e-2	1.089822
10e-3	10e0	1.334753	10e-3	10e2	1.089822	10e-3	10e2	1.033896
			10e-3	10e1	1.242588	10e-3	10e1	1.143015
			10e-3	10e0	1.242588	10e-3	10e0	1.143015
			10e-3	10e-1	1.143015	10e-3	10e-1	1.089822
			10e-3	10e-2	1.242588	10e-3	10e-2	1.089822
10e-4	10e0	1.334753	10e-4	10e2	1.089822	10e-4	10e2	1.033896
			10e-4	10e1	1.242588	10e-4	10e1	1.143015
			10e-4	10e0	1.242588	10e-4	10e0	1.143015
			10e-4	10e-1	1.143015	10e-4	10e-1	1.089822
			10e-4	10e-2	1.242588	10e-4	10e-2	1.089822
10e-5	10e0	1.334753	10e-5	10e2	1.089822	10e-5	10e2	1.033896
			10e-5	10e1	1.242588	10e-5	10e1	1.143015
			10e-5	10e0	1.242588	10e-5	10e0	1.143015
			10e-5	10e-1	1.143015	10e-5	10e-1	1.089822
			10e-5	10e-2	1.242588	10e-5	10e-2	1.089822

Tabela 7.1: BR para cilindro no centro (Posição 1)



## APÊNDICE C

Aqui são apresentados os fluxogramas dos algoritmos implementados.

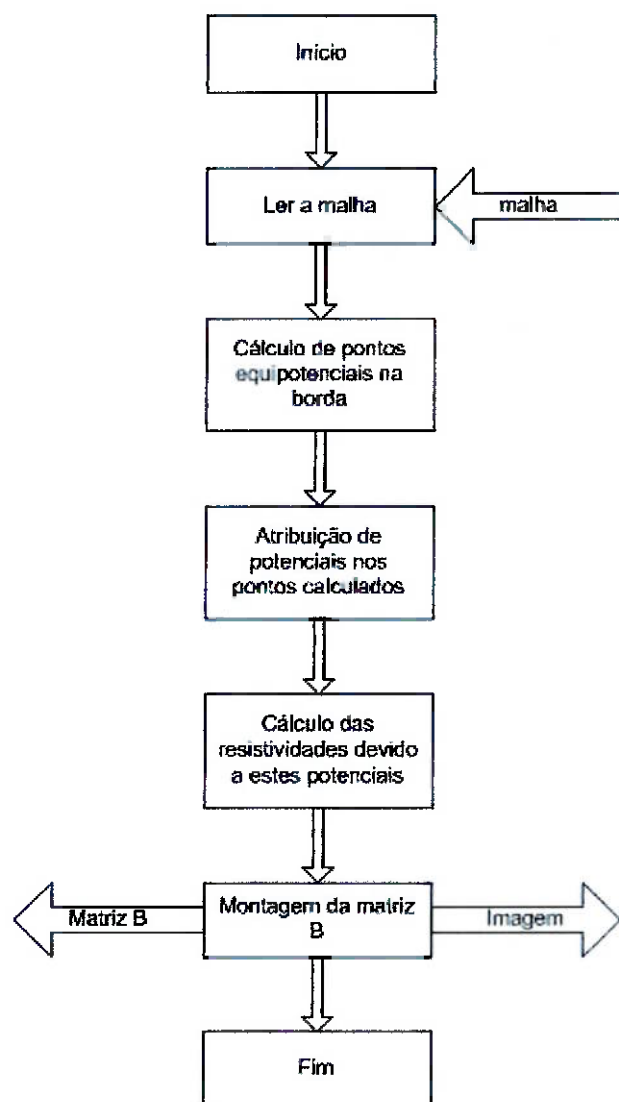


Figura 7.2: Fluxograma do algoritmo de retro-projeção simples.

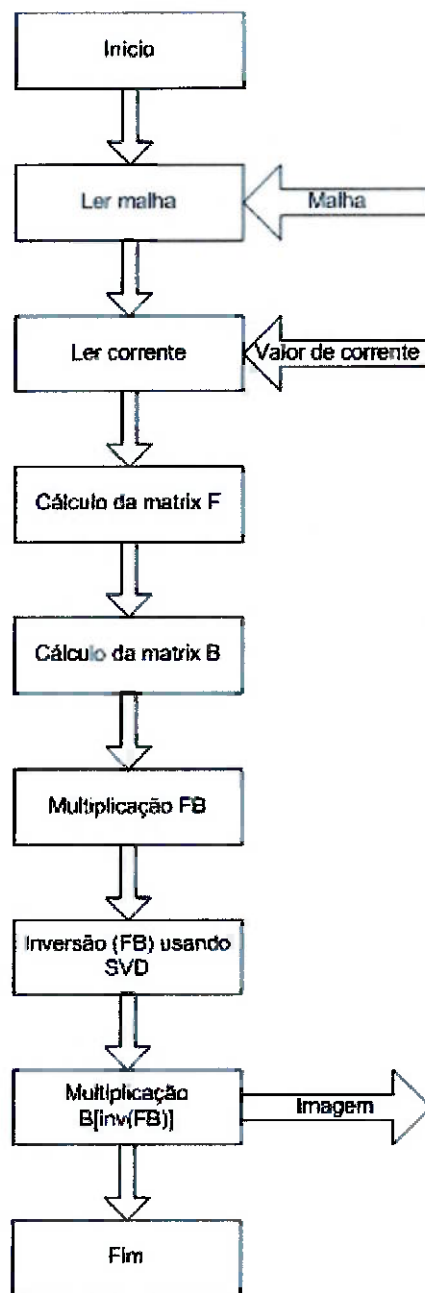


Figura 7.3: Fluxograma do algoritmo de retro-projeção filtrada.

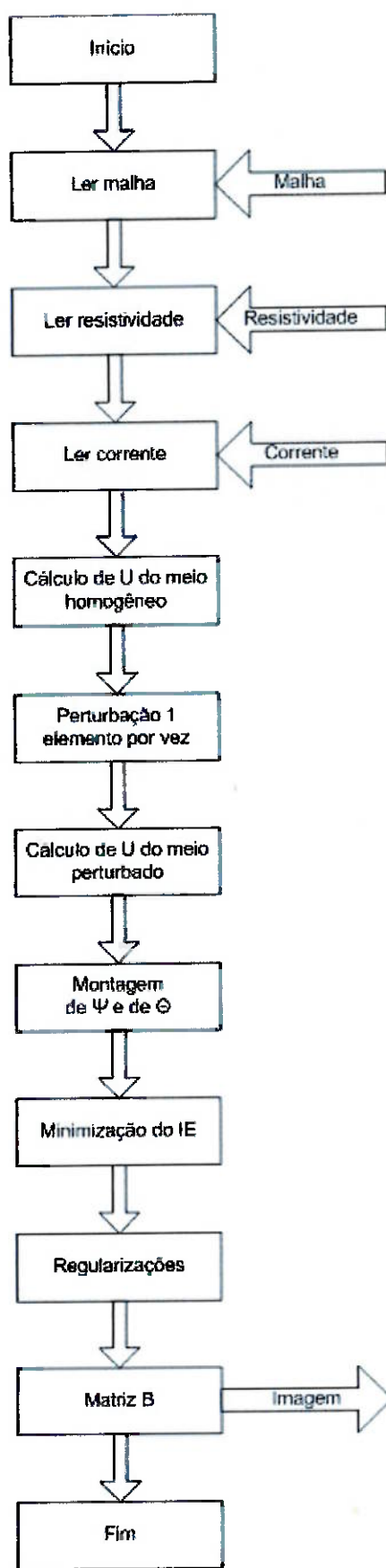


Figura 7.4: Fluxograma do algoritmo de caixa-preta.